

波束と量子基礎論研究会2026

# 振動電場下のKleinトンネル効果

落合 誠

早稲田大学 先進理工学部 物理学科 助教

中里研究室 (量子力学基礎論研究室)

2026年1月19日

M. Ochiai and S. Shibayama, JHEP10(2025)172 ※芝山駿介氏 (早大) との共同研究

# Kleinトンネル効果 (Kleinパラドックス)

Klein, Z. Phys. (1929)

- ▶ 1次元階段ポテンシャル下の定常Dirac方程式

$$(H_{\text{Dirac}} + V(z))\psi^{(E)}(z) = E\psi^{(E)}(z)$$

$$H_{\text{Dirac}} = -i\alpha_z\partial_z + \beta m,$$

$$V(z) = \begin{cases} V_0 & (z \geq 0) \\ 0 & (z < 0) \end{cases}$$

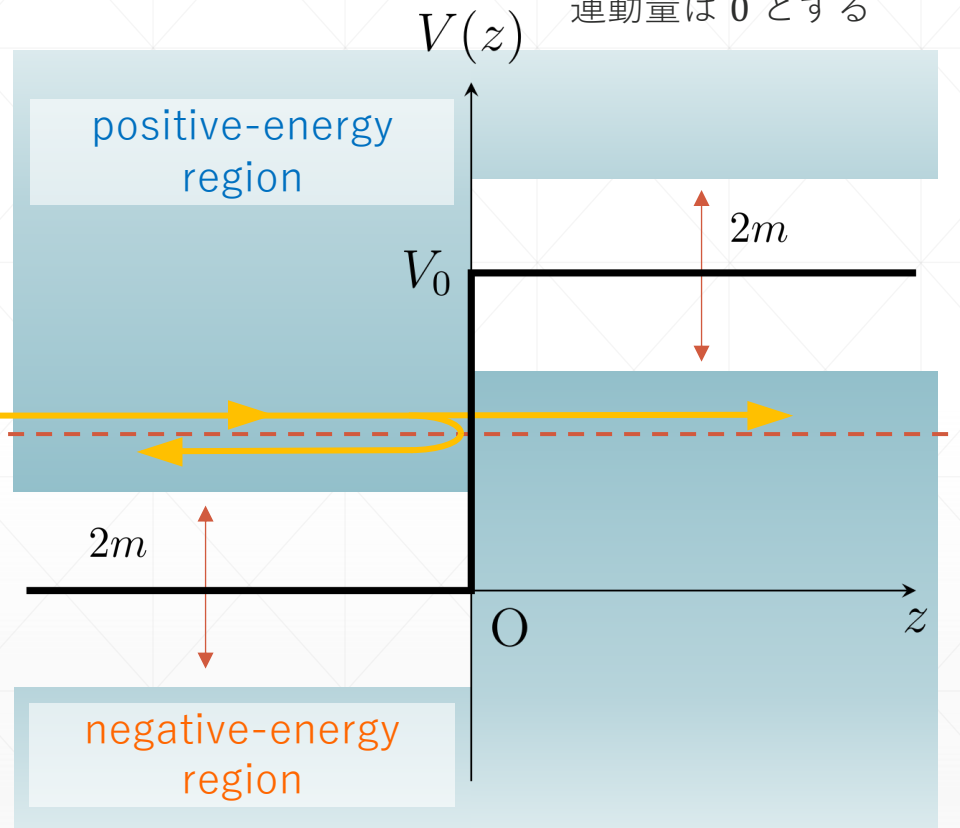
$\psi^{(E)}$

$$m < E < V_0 - m$$

→  $V_0 > 2m$  のとき、

正負エネルギー解が  $z = 0$  で接続され、透過波がポテンシャル内部を減衰せずに進行する

※簡単のため  $x, y$  方向の運動量は 0 とする



# 関連現象: Schwinger効果

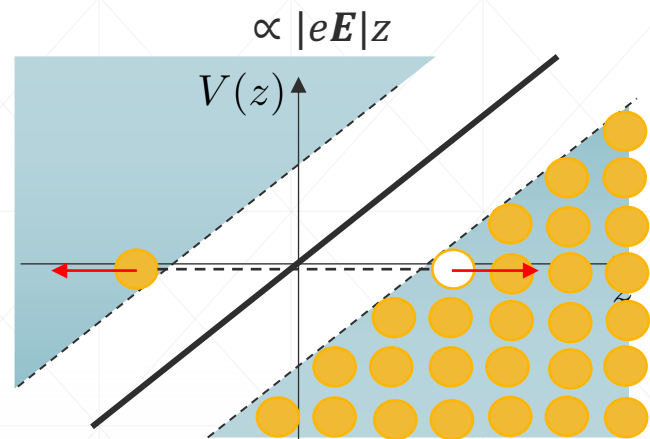
Schwinger, Phys. Rev. (1951)

▶ 非常に強い電場下における真空の崩壊、及び粒子・反粒子対の自発生成

▶ 一様定常電場  $\mathbf{E} = \text{const.}$  の場合

単位時空体積あたりの  
真空の崩壊率  $\sim \exp\left[-\pi \frac{m^2 c^3}{\hbar |e\mathbf{E}|}\right]$

※負エネルギー領域へのトンネル確率と密接に関係



# 関連現象: Schwinger効果

Schwinger, Phys. Rev. (1951)

▶ 非常に強い電場下における真空の崩壊、及び粒子・反粒子対の自発生成

▶ 一様定常電場  $E = \text{const.}$  の場合

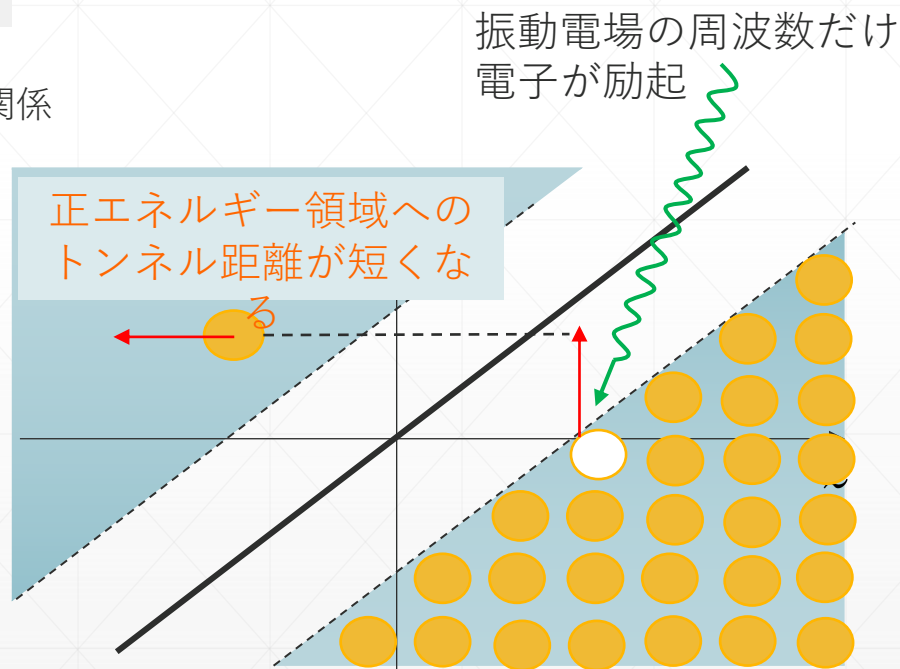
$$\text{単位時空体積あたりの真空の崩壊率} \sim \exp\left[-\pi \frac{m^2 c^3}{\hbar |eE|}\right]$$

※負エネルギー領域へのトンネル確率と密接に関係

▶ さらに振動電場も加えると、真空崩壊率や粒子生成数が劇的に増加

(アシストされたSchwinger効果)

Schützhold, Gies, & Dunne, Phys. Rev. Lett. (2008)



# 研究目的

定常電場 (or 定常ポテンシャル) だけある場合

Kleinトンネル効果  
(正負エネルギー領域間のトンネル)



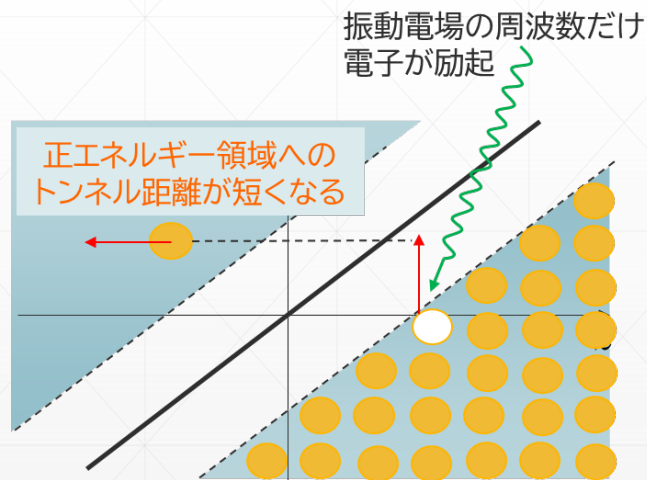
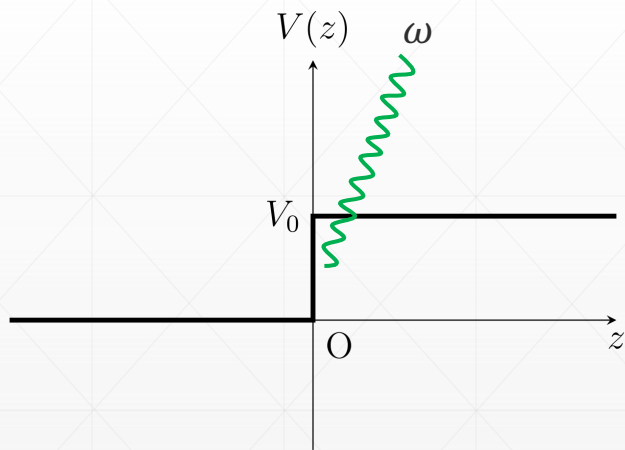
Schwinger効果  
(真空からの粒子・反粒子生成)

振動電場も加えた場合

アシストされたKleinトンネル効果  
(?)



アシストされたSchwinger効果



# 注意しなければならない点

時間依存する電場が加わるともはや定常散乱の問題ではなくなる

→ 定常状態を記述する散乱波動関数では非定常散乱を議論できない

→ **波束**の散乱を議論する

① 波束をどうやって記述するか

② 波束の反射率・透過率をどうやって定義するか

# 波束の作り方 (振動電場がない場合)

▶ 散乱波動関数を重み  $g(p)$  で積分して波束を作る

左方入射解  $\psi_s^{(E)}$  を用いて

$$\Psi^{(0)}(z, t) = \int_0^\infty dp g(p) \psi_s^{(E_p)}(z) e^{-iE_p t},$$

ただし  $E = E_p (= \sqrt{p^2 + m^2}) \geq m$

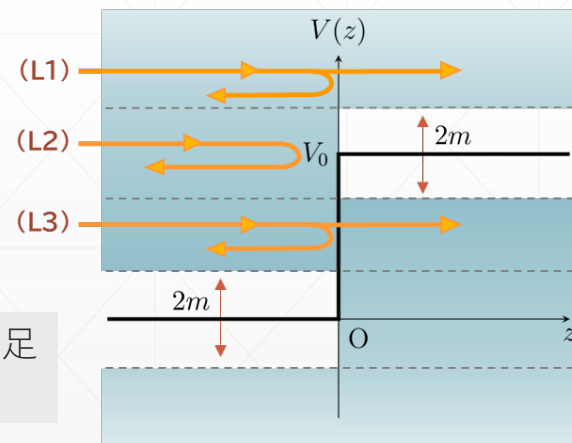
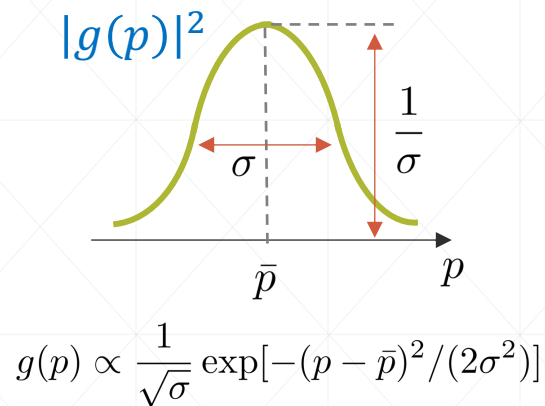
▶ 例: Klein region  $m \leq E < V_0 - m$  における左方入射解

$$\psi_s^{(E)}(z) \propto \begin{cases} u(p, s)e^{ipz} + R_{\rightarrow}(p)u(-p, s)e^{-ipz} & (z < 0) \\ T_{\rightarrow}(p)v(q, \tilde{s})e^{-iqz} & (z \geq 0) \end{cases}$$

$u(p, s)$ : 正エネルギー Dirac スピノール,

$v(p, s)$ : 負エネルギー Dirac スピノール

(L1)~(L3)を足し合わせる



# 波束の作り方 (振動電場がある場合)

$$\alpha_z = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$$

- ▶ ベクトルポテンシャルの項を摂動とみなして、解を摂動級数で表す

$$H = \underbrace{H_{\text{Dirac}} + V(z)}_{\text{非摂動}} - \underbrace{e\alpha_z A_z(z, t)}_{\text{摂動}}$$

$$A_z(z, t) = \frac{\mathcal{E}_z}{\omega} \sin(\omega t) e^{-(z/l)^2}$$

↳  $z \sim 0$  付近に幅  $l$  で局在した周波数  $\omega$  の振動電場

- ▶ 非摂動解  $\Psi^{(0)}$  は前ページで定義した波束の解

$$\Psi^{(0)}(z, t) = \int_0^\infty dp g(p) \psi_s^{(E_p)}(z) e^{-iE_p t}$$

- ▶ 摂動項の寄与は遅延Green関数を介して取り込む

$$[i\partial_t - (H_{\text{Dirac}} + V(z))] S_{\text{ret}}(z, t; z', t') = \beta \delta(z - z') \delta(t - t'),$$

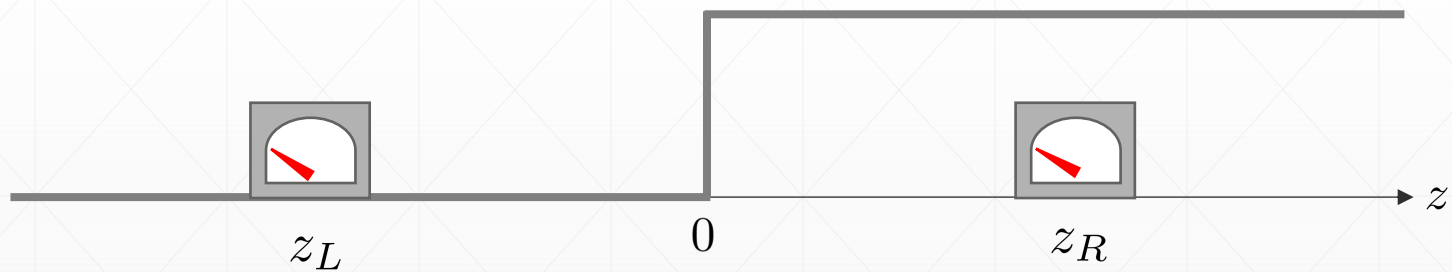
$$\Rightarrow S_{\text{ret}}(z, t; z', t') = -i\theta(t - t') \sum_{s, \epsilon = \pm} \left[ \int_0^\infty dp \psi_s^{(\epsilon E_p)}(z) \psi_s^{(\epsilon E_p)\dagger}(z') e^{-i\epsilon E_p(t-t')} + \int_0^\infty dq \phi_s^{(V_0 + \epsilon E_q)}(z) \phi_s^{(V_0 + \epsilon E_q)\dagger}(z') e^{-i(V_0 + \epsilon E_q)(t-t')} \right].$$

階段関数

左方/右方入射の散乱波動関数

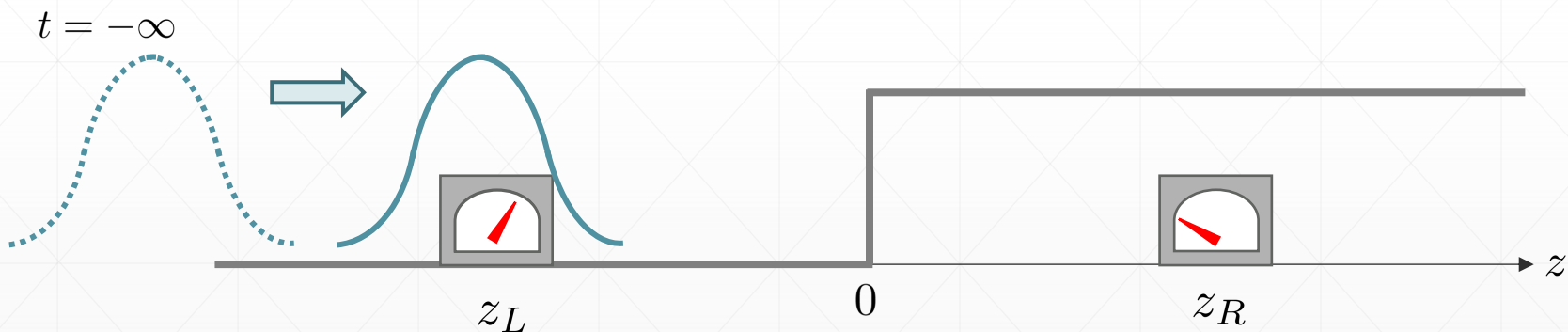
# 波束散乱と測定の過程

1. 無限の過去  $t = -\infty$  に測定器をonにしておく



# 波束散乱と測定の過程

1. 無限の過去  $t = -\infty$  に測定器をonにしておく
2. 波束が左遠方  $z = -\infty$  から入射  $\rightarrow$  途中、位置  $z_L$  にある測定器を通る

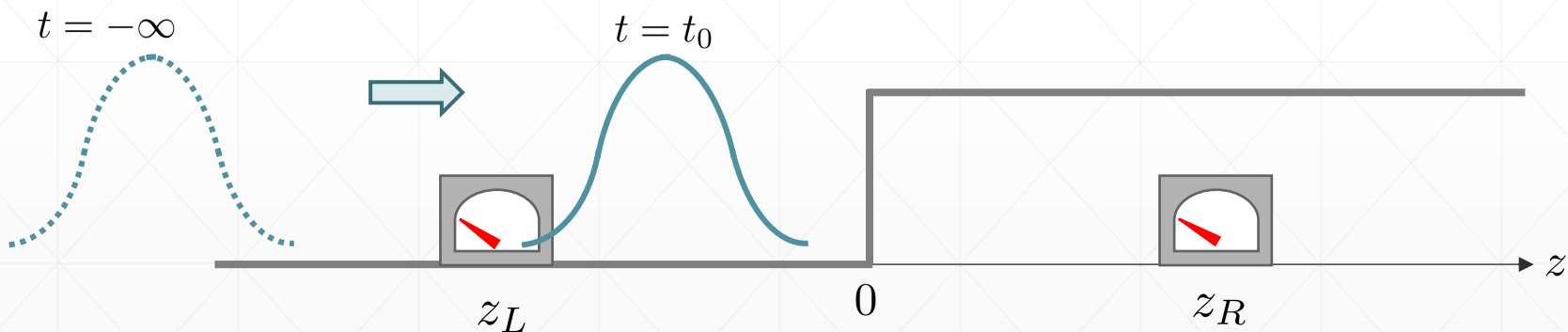


$$J_z(z_L, t) = \Psi^\dagger(z_L, t) \alpha_z \Psi(z_L, t)$$

を測定し続ける

# 波束散乱と測定の過程

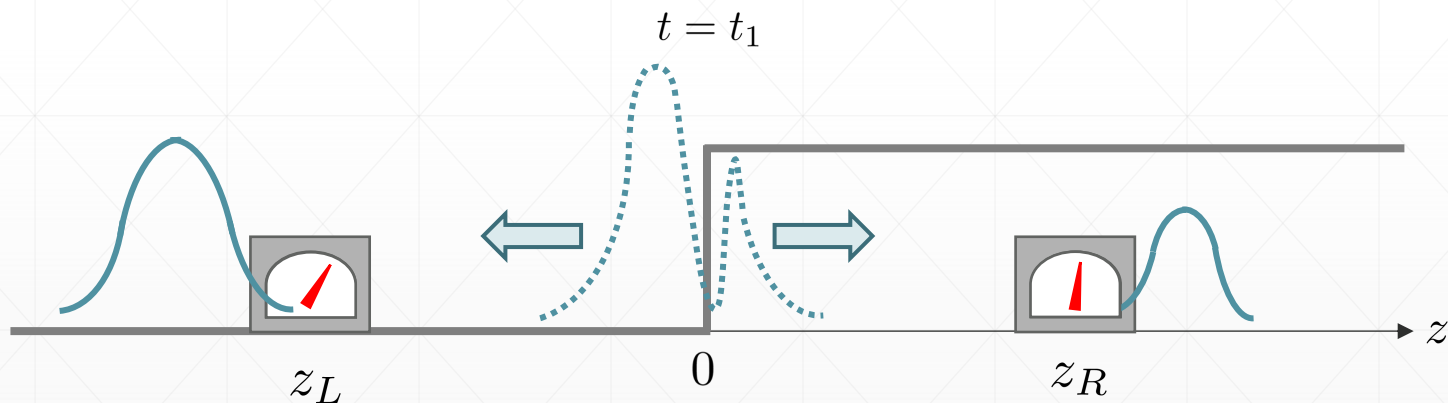
1. 無限の過去  $t = -\infty$  に測定器をonにしておく
2. 波束が左遠方  $z = -\infty$  から入射  $\rightarrow$  途中、位置  $z_L$  にある測定器を通る
3. 有限の時刻  $t_0$  で測定器をoffにする (入射波束の測定をストップ)



測定された入射カレント  
の総量  $= \int_{-\infty}^{t_0} dt J_z(z_L, t)$

# 波束散乱と測定の過程

1. 無限の過去  $t = -\infty$  に測定器をonにしておく
2. 波束が左遠方  $z = -\infty$  から入射  $\rightarrow$  途中、位置  $z_L$  にある測定器を通る
3. 有限の時刻  $t_0$  で測定器をoffにする (入射波束の測定をストップ)
4. その後の時刻  $t_1$  ( $> t_0$ ) に再び測定器をonにして散乱波束を測定、 $t = \infty$  まで続ける



$$\text{反射カレントの総量} = \int_{t_1}^{\infty} dt J_z(z_L, t)$$

$$\text{透過カレントの総量} = \int_{t_1}^{\infty} dt J_z(z_R, t)$$

# 波束の反射率・透過率

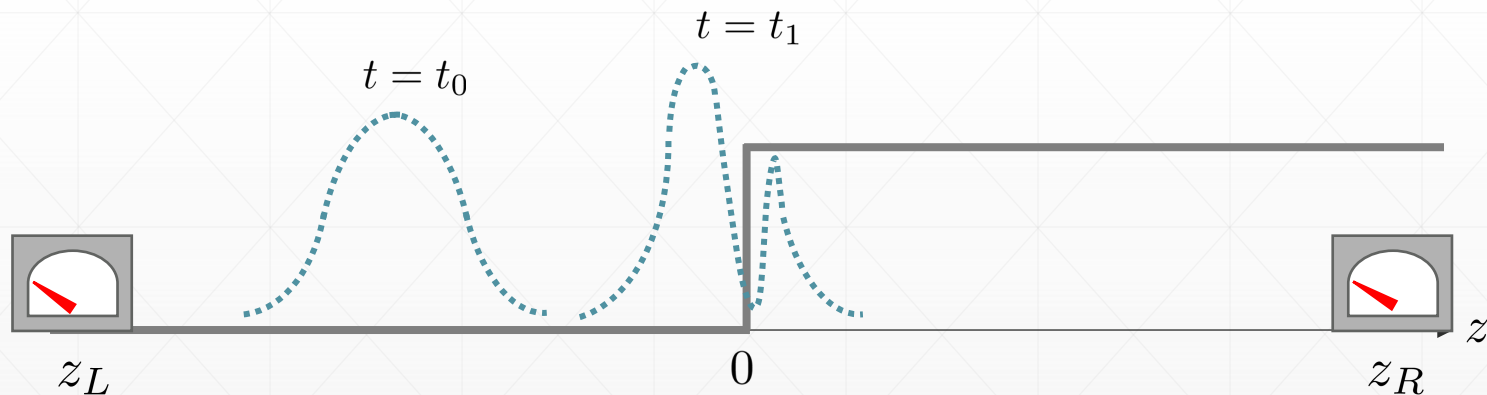
▶ 入射カレントの総量に対する反射/透過カレントの総量の比として定義

$$P_{\text{refl}} = \left| \lim_{z_L \rightarrow -\infty} \frac{\int_{t_1}^{\infty} dt J_z(z_L, t)}{\int_{-\infty}^{t_0} dt J_z(z_L, t)} \right|, \quad P_{\text{trans}} = \left| \lim_{\substack{z_L \rightarrow -\infty \\ z_R \rightarrow \infty}} \frac{\int_{t_1}^{\infty} dt J_z(z_R, t)}{\int_{-\infty}^{t_0} dt J_z(z_L, t)} \right|$$

▶ 時刻  $t_0, t_1$  を固定したまま測定点  $z_L, z_R$  を無限遠に飛ばす極限で

入射/反射/透過する波束だけがそれぞれ測定器に捕捉され、 $t_0, t_1$  には依存しなくなる (と期待)

→ 実際に計算して確認

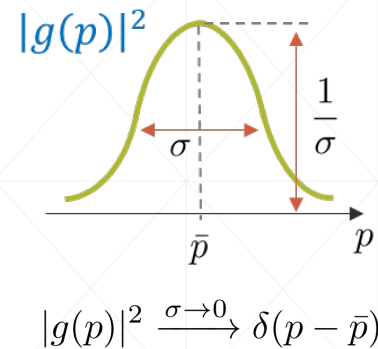


# 結果 (振動電場がない場合)

▶ 波束の反射率と透過率 … 定常散乱のときと整合的

$$P_{\text{refl}} = \left| \lim_{z_L \rightarrow -\infty} \frac{\int_{t_1}^{\infty} dt J_z(z_L, t)}{\int_{-\infty}^{t_0} dt J_z(z_L, t)} \right| = \int_0^{\infty} dp |g(p)|^2 |R_{\rightarrow}(p)|^2,$$

$$P_{\text{trans}} = \left| \lim_{\substack{z_L \rightarrow -\infty \\ z_R \rightarrow \infty}} \frac{\int_{t_1}^{\infty} dt J_z(z_R, t)}{\int_{-\infty}^{t_0} dt J_z(z_L, t)} \right| = \int_{|E_p - V_0| \geq m} dp |g(p)|^2 \frac{q}{p} |T_{\rightarrow}(p)|^2.$$



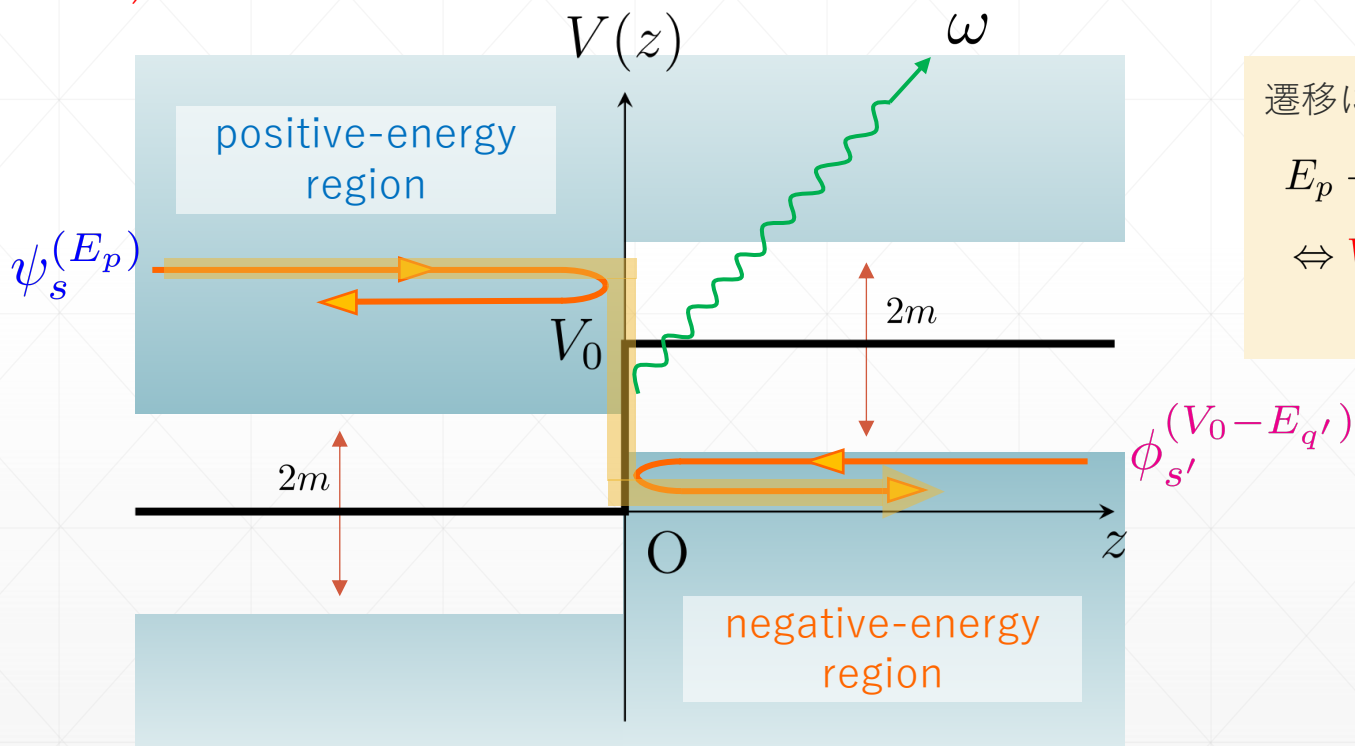
▶ 確率保存が成立する

$$\begin{aligned} P_{\text{refl}} + P_{\text{trans}} &= \int_{|E_p - V_0| \geq m} dp |g(p)|^2 \left( |R_{\rightarrow}(p)|^2 + \frac{q}{p} |T_{\rightarrow}(p)|^2 \right) \\ &\quad + \int_{|E_p - V_0| < m} dp |g(p)|^2 |R_{\rightarrow}(p)|^2 \quad = 1 \\ &= \int_0^{\infty} dp |g(p)|^2 = 1. \end{aligned}$$

# 振動電場が摂動的に加わると

▶ 正エネルギーから負エネルギーへの遷移  $\psi_s^{(E_p)} \xrightarrow{\omega} \phi_{s'}^{(V_0 - E_{q'})}$  が起こり得る

※  $V_0 < 2m$  &  $\omega < 2m$  であってもこの過程は存在し得る (“アシストされたKleinトンネル”)



遷移に必要なエネルギー  $\omega$  は

$$E_p - \omega = V_0 - E_{q'}$$

$$\Leftrightarrow V_0 + \omega = E_p + E_{q'} \geq 2m.$$

# 結果 (振動電場の2次まで)

▶ 透過率 ( $V_0 < 2m$ ,  $\omega < 2m$  &  $E_p < V_0 + m$  のとき) ※単一モード極限

$|g(p)|^2 \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0}$  delta function

摂動パラメータ  $\lambda = \frac{e\mathcal{E}_z}{2m\omega}$

$$P_{\text{trans}} = \left| \lim_{\substack{z_L \rightarrow -\infty \\ z_R \rightarrow \infty}} \frac{\int_{t_1}^{\infty} dt J_z(z_R, t)}{\int_{-\infty}^{t_0} dt J_z(z_L, t)} \right|$$

$$= \left| \lambda^2 \int_{E_p + \omega > V_0 + m} dp |g(p)|^2 \mathcal{B}_{\text{trans}}(p, p_+) + \lambda^2 \int_{E_p - \omega < V_0 - m} dp |g(p)|^2 \mathcal{C}(p, q_-) + \mathcal{O}(\lambda^3) \right|,$$

ただし

$\omega$  のアシストで障壁を乗り越える

$\omega$  のアシストでKleinトンネルする

$\mathcal{B}_{\text{trans}}(p, p_+)$

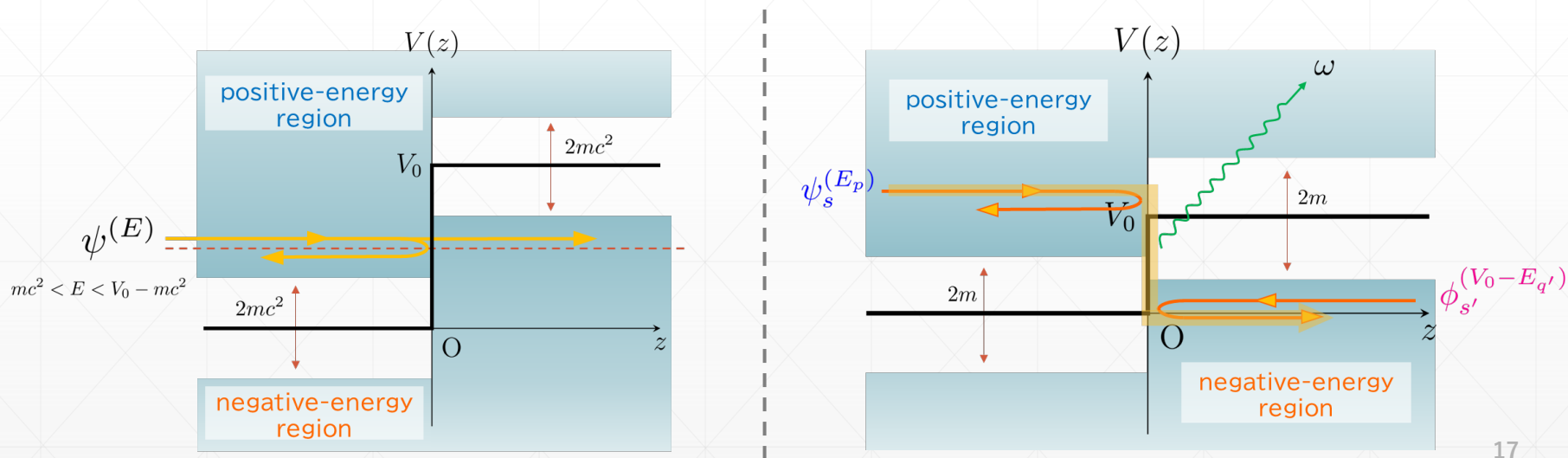
$$= \frac{q_+}{p_+} |T_{\rightarrow}(p_+)|^2 (2\pi)^2 \frac{E_p}{p} \frac{E_{p_+}}{p_+} \sum_{s'} |\langle \psi_{s'}^{(E_{p_+})}, \psi_s^{(E_p)} \rangle|^2 + |R_{\leftarrow}(q_+)|^2 (2\pi)^2 \frac{E_p}{p} \frac{E_{q_+}}{q_+} \sum_{s'} |\langle \phi_{s'}^{(V_0 + E_{q_+})}, \psi_s^{(E_p)} \rangle|^2$$

$$+ 2\text{Re} \left\{ \sqrt{\frac{E_{q_+}}{E_{p_+}}} T_{\rightarrow}^*(p_+) R_{\leftarrow}(q_+) (2\pi)^2 \frac{E_p}{p} \frac{E_{p_+}}{p_+} \sum_{s'} \langle \psi_{s'}^{(E_{p_+})}, \psi_s^{(E_p)} \rangle^* \langle \phi_{s'}^{(V_0 + E_{q_+})}, \psi_s^{(E_p)} \rangle \right\},$$

$$\mathcal{C}(p, q_-) = (2\pi)^2 \frac{E_p}{p} \frac{E_{q_-}}{q_-} \sum_{s'} |\langle \phi_{s'}^{(V_0 - E_{q_-})}, \psi_s^{(E_p)} \rangle|^2,$$

# 結論

- ▶ 相対論的量子力学におけるDiracフェルミオンのポテンシャル散乱を議論した
  - ▶ 階段ポテンシャルの下では、ポテンシャル障壁の高さ  $V_0 > 2m$  のとき Kleinトンネル効果 (正負エネルギー領域間のトンネル) が起こる
  - ▶ 振動電場も加えた場合、振動電場が波動関数にエネルギーを与える or 奪うことによって、 $V_0 + \omega > 2m$  であれば “アシストされたKleinトンネル効果” が起こることを示した



# 課題 & 今後の展望

▶ 今回の波束の議論がどの程度妥当で、一般性があるのか

▶ 波束の作り方

▶ ポテンシャルの配位

階段ポテンシャル → 箱型ポテンシャル等に変更してみる

▶ 反射率・透過率の定義、etc.

▶ “アシストされたKleinトンネル効果” のグラフェン系への応用

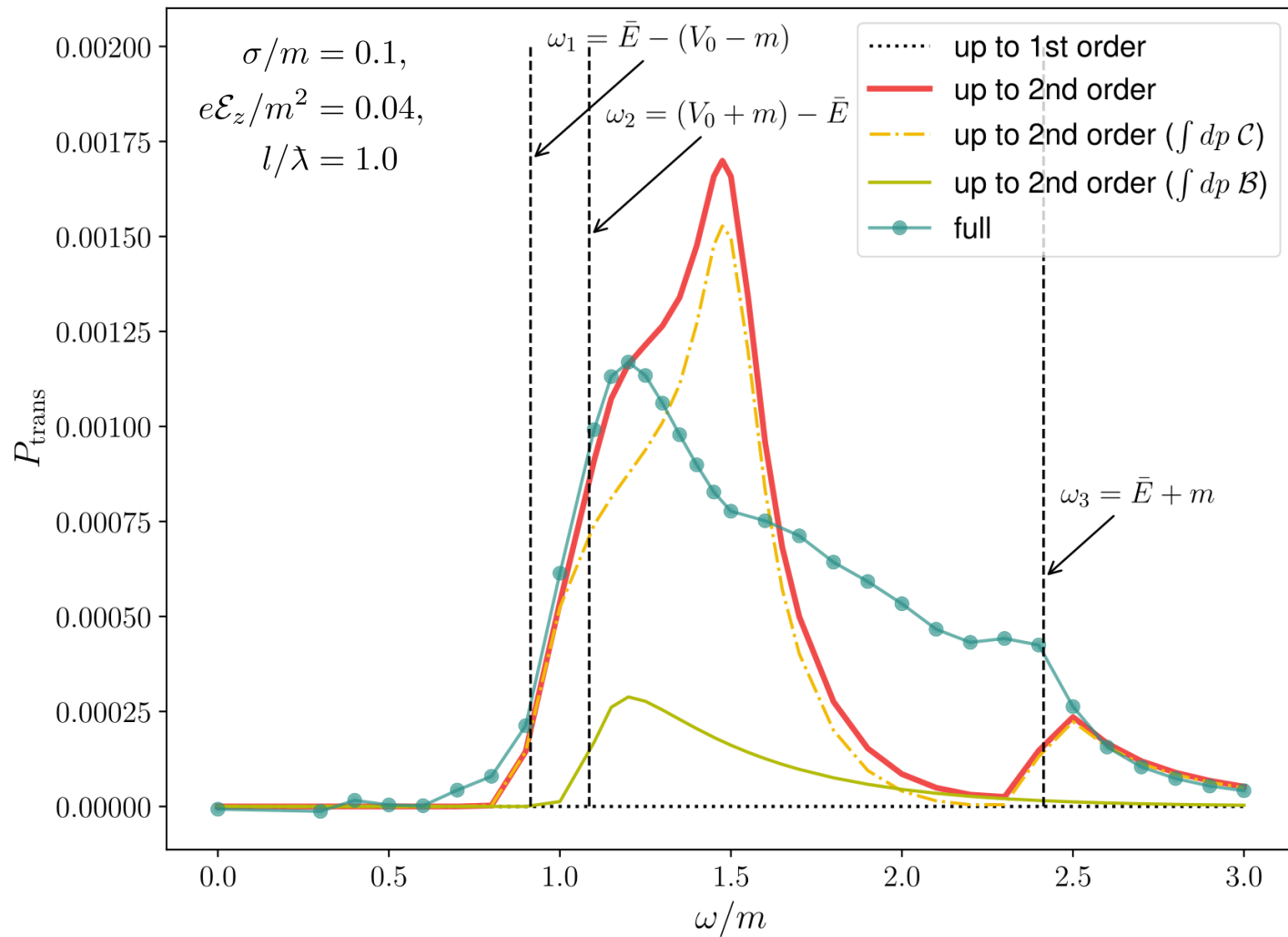
▶ グラフェン… 単層グラファイト、電子の有効質量が0となって相対論的粒子として振る舞う

▶ 2次元グラフェン平面上のKleinトンネル効果は実験で検証されている

→ アシストされたKleinトンネル効果を2次元平面上で記述できるか



$$\bar{p}/m = 1.0, V_0/m = 1.5$$



# 目次

## ▶ 導入

- ▶ Kleinトンネル効果 (Kleinパラドックス)

## ▶ 研究背景と目的

- ▶ Schwinger効果: 強電場下の真空崩壊

- ▶ 近年ホットな話題: 振動電場下のSchwinger効果

## ▶ 振動電場下のKleinトンネル効果

M. Ochiai and S. Shibayama, J. High Energ. Phys. **2025**, 172 (2025)

- ▶ 非定常散乱の議論

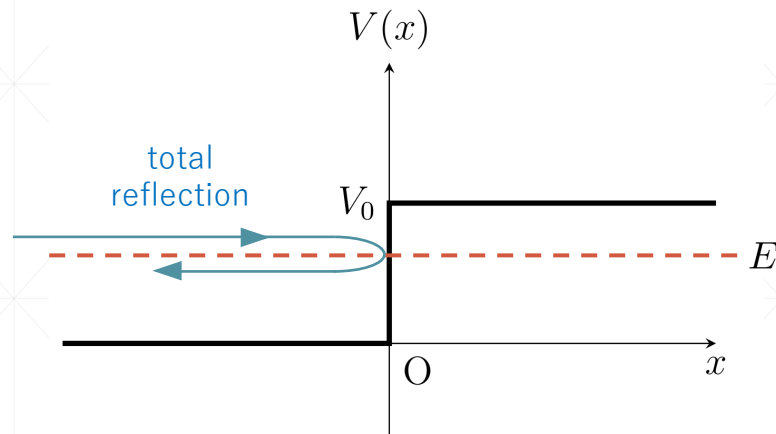
## ▶ まとめと展望

# 1次元階段ポテンシャル下の散乱問題

## ▶ Schrödinger方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \Psi(x, t),$$

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$



## ▶ 変数分離 $\Psi(x, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \psi(x)$

→ エネルギー固有値  $E$  の定常散乱を記述する解 (散乱波動関数) を求める

## ▶ 例) $0 < E < V_0$ のとき、左方投入の解が存在

$$\psi(x) \propto \begin{cases} e^{ikx} + Re^{-ikx} & (x < 0) \\ Te^{-\lambda x} & (x > 0) \end{cases}, \quad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = V_0 - \frac{\hbar^2 \lambda^2}{2m}$$

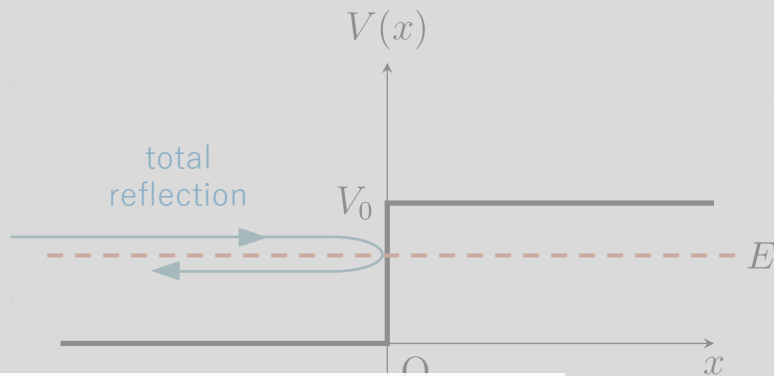
↳ ポテンシャル幅が無限ゆえ、透過率はゼロ ( $\Leftrightarrow$  反射率は1)

# 1次元階段ポテンシャル下の散乱問題

## ▶ Schrödinger方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \Psi(x, t),$$

$$V(x) = \begin{cases} V_0 & (x > 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$



## ▶ 変数分離 $\Psi(x, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \psi(x)$

→ エネルギー固有値  $E$  の定常散乱を記述する解 (散乱波動関数) を求める

## ▶ 例) $0 < E < V_0$ のとき、

相対論的粒子に対して同じ問題を考えたら  
どうなるか? (Klein, 1929)

$$\psi(x) \propto \begin{cases} e^{ikx} + Re^{-ikx} & (x < 0) \\ Te^{-\lambda x} & (x > 0) \end{cases}, \quad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = V_0 - \frac{\hbar^2 \lambda^2}{2m}$$

ポテンシャル幅が無限ゆえ、透過率はゼロ



# 相対論的量子力学

- ▶ Diracフェルミオン (スピン1/2) のハミルトニアン

$$H_{\text{Dirac}} = c\boldsymbol{\alpha} \cdot (-i\hbar\nabla) + \beta mc^2, \quad \text{ただし} \quad \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$$

→ 自由Dirac方程式  $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{x}, t) = H_{\text{Dirac}} \Psi(\mathbf{x}, t)$

- ▶ 波動関数  $\Psi(\mathbf{x}, t)$  は4成分  $\ni$  スピン自由度

- ▶  $H_{\text{Dirac}}$  のエネルギー固有値  $E$  は相対論的なエネルギー・運動量の関係を満たす

$$(c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta mc^2)^2 = (c\mathbf{p})^2 + (mc^2)^2 = E^2$$

$\because \{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij}, \quad \{\alpha_i, \beta\} = 0, \quad \beta^2 = 1$

→  $|E| = \sqrt{(c\mathbf{p})^2 + (mc^2)^2} = mc^2 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \mathcal{O}(1/c^2)$

# 平面波解

▶  $E = \pm E_p = \pm \sqrt{(cp)^2 + (mc^2)^2} \rightarrow$  負のエネルギー固有値も存在

正エネルギー解  $\cdots E = E_p > mc^2$  に属する固有関数

$$\Psi(\mathbf{x}, t) \propto u(\mathbf{p}, s) e^{-\frac{i}{\hbar}(E_p t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})},$$

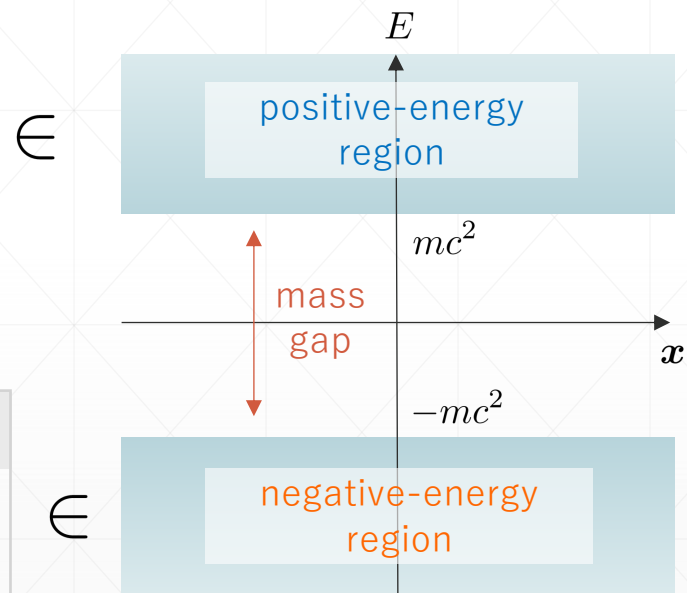
$$\text{ただし } u(\mathbf{p}, s) = \begin{pmatrix} \xi(s) \\ \frac{c\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{E_p + mc^2} \xi(s) \end{pmatrix},$$

$\xi(s)$ : 2成分スピノール

負エネルギー解  $\cdots E = -E_p < -mc^2$  に属する固有関数

$$\Psi(\mathbf{x}, t) \propto v(\mathbf{p}, s) e^{\frac{i}{\hbar}(E_p t - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})},$$

$$\text{ただし } v(\mathbf{p}, s) = \begin{pmatrix} \frac{c\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{E_p + mc^2} \xi(s) \\ \xi(s) \end{pmatrix}$$



# 1次元階段ポテンシャル下のDirac方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(z, t) = (H_{\text{Dirac}} + V(z)) \Psi(z, t),$$

※簡単のため  $x, y$  方向の運動量は 0 とする

$$H_{\text{Dirac}} = c\alpha_z \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \right) + \beta mc^2, \quad V(z) = \begin{cases} V_0 & (z > 0) \\ 0 & (z < 0) \end{cases}$$

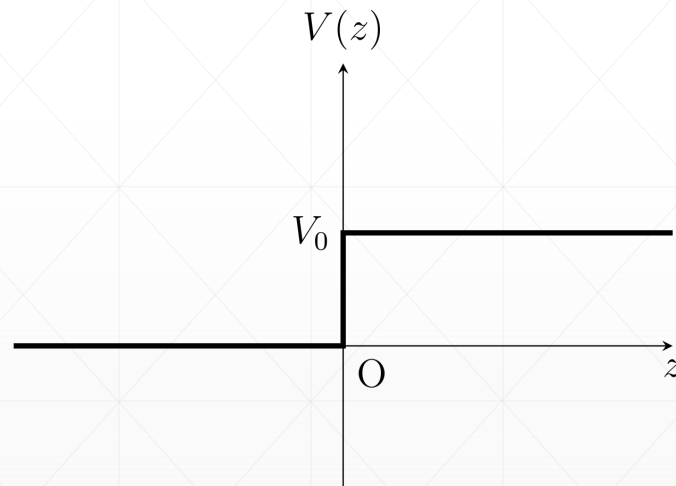
▶ 変数分離  $\Psi(z, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \psi^{(E)}(z)$

→ 定常Dirac方程式

$$(H_{\text{Dirac}} + V(z)) \psi^{(E)}(z) = E \psi^{(E)}(z)$$

▶ 左側 ( $z < 0$ ) と右側 ( $z > 0$ ) でそれぞれ定常Dirac方程式を解き、境界 ( $z = 0$ ) で解を接続

$$\psi^{(E)}(-0) = \psi^{(E)}(+0)$$



# Kleinトンネル効果 (Kleinパラドックス)

Klein, Z. Phys. (1929)

- ▶ Klein region  $m < E < V_0 - m$  における左方入射解

$$\psi_s^{(E)}(z) \propto \begin{cases} u(p, s)e^{ipz} + Ru(-p, s)e^{-ipz} & (z < 0) \\ Tv(q, \tilde{s})e^{-iqz} & (z > 0) \end{cases}$$

- ▶ エネルギー・運動量の関係  $E = E_p = V_0 - E_q$  ※  $p, q > 0$

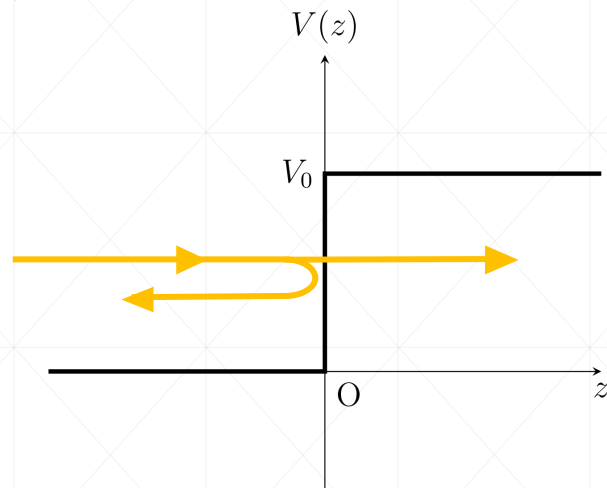
- ▶ 反射率 & 透過率

$$P_r = |R|^2, \quad P_t = \frac{q}{p}|T|^2, \quad P_r + P_t = 1.$$

※  $E < V_0$  にも関わらず透過が起こる

- ▶ ポテンシャル障壁の高さを無限大にする極限 (剛体壁極限)  $V_0 \rightarrow \infty$  でも透過する

$$P_t \xrightarrow{V_0 \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{\sqrt[4]{\frac{E-m}{E+m}} + \sqrt[4]{\frac{E+m}{E-m}}} \right)^2 \neq 0.$$



# 目次

## ▶ 導入

- ▶ Kleinトンネル効果 (Kleinパラドックス)

## ▶ 研究背景と目的

- ▶ Schwinger効果: 強電場下の真空崩壊

- ▶ 近年ホットな話題: 振動電場下のSchwinger効果

## ▶ 振動電場下のKleinトンネル効果

M. Ochiai and S. Shibayama, J. High Energ. Phys. **2025**, 172 (2025)

- ▶ 非定常散乱の議論

## ▶ まとめと展望

# 空孔理論による考察

## ▶ 空孔理論 (hole theory)

真空 … 負エネルギー領域には電子が全て占有、正エネルギー領域には電子がない状態

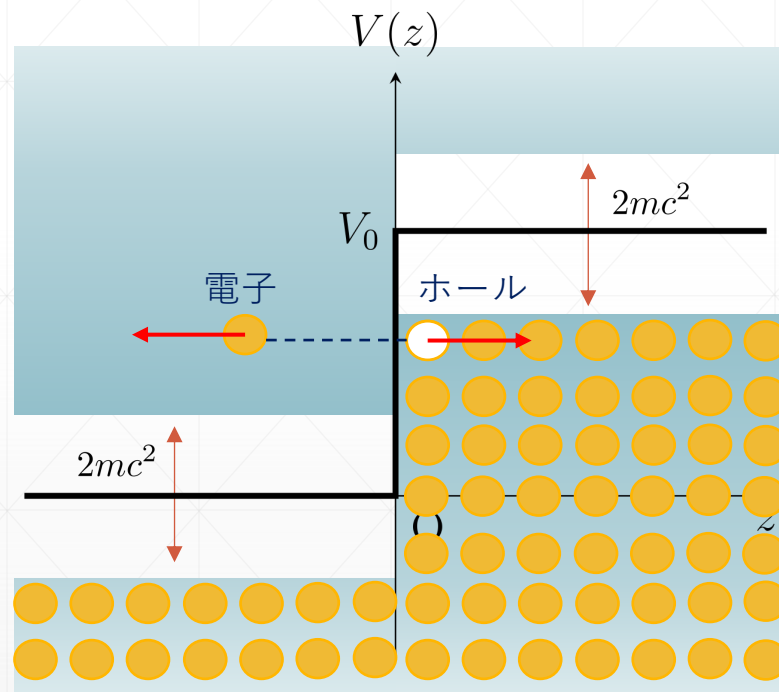
## ▶ $V_0 > 2mc^2$ の階段ポテンシャルがあると

$z > 0$  にあった負エネルギー領域の電子が  
 $z < 0$  の正エネルギー領域にトンネル

→ 電子・ホール (陽電子) の対生成

※ Klein トンネル効果は

真空の不安定性と密接に関わる現象



# 関連現象: Schwinger効果

▶ 非常に強い電場下における真空の崩壊、及び粒子・反粒子対の自発生成

▶ 一様定常電場  $\mathbf{E} = \text{const.}$  の場合

$$\text{単位時空体積あたりの真空の崩壊率} \sim \exp\left[-\pi \frac{m^2 c^3}{\hbar |e\mathbf{E}|}\right]$$

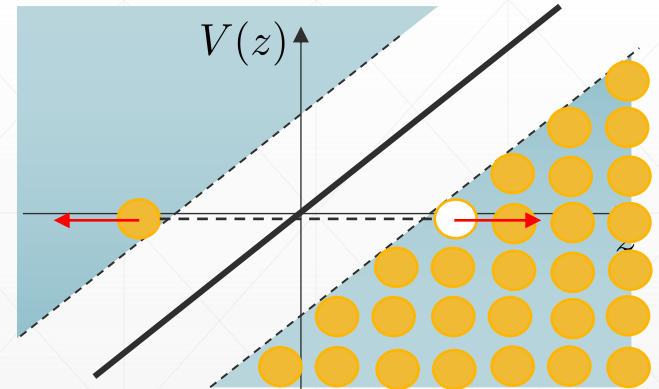
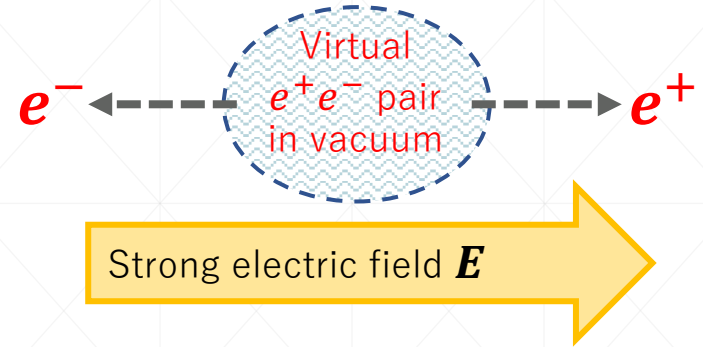
※極めて強い電場強度

$$|\mathbf{E}| \geq m^2 c^3 / (\hbar |e|) \approx 10^{18} \text{ V/m が必要}$$

▶ 一様定常電場  $\mathbf{E} \parallel \mathbf{e}_z$  をもたらすスカラーポテンシャル

$V(z) \propto |e\mathbf{E}|z$  に対して

$$\frac{\text{トンネル距離}}{\text{Compton波長}} \sim \frac{mc^2}{|e\mathbf{E}|} \cdot \frac{mc}{\hbar} = \frac{m^2 c^3}{\hbar |e\mathbf{E}|}$$

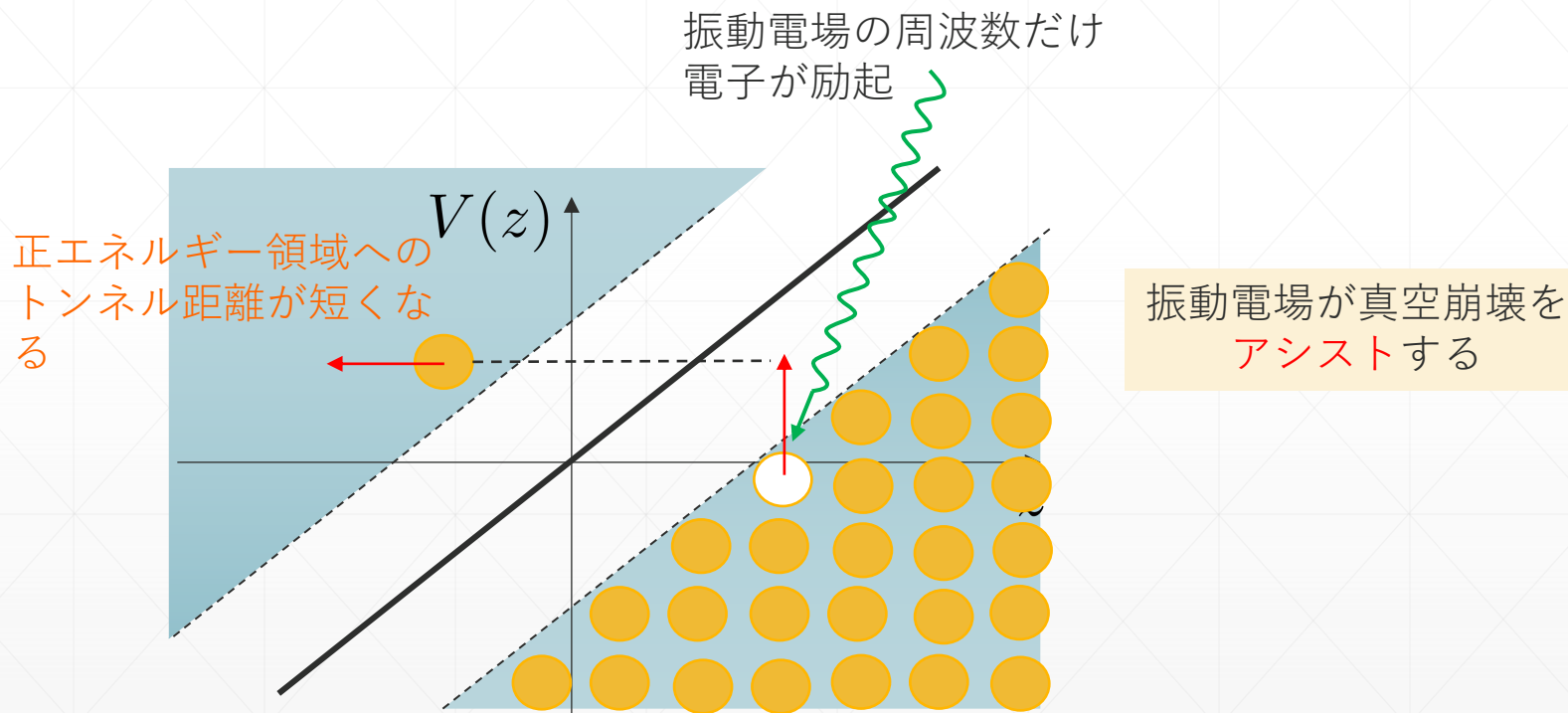


# 近年ホットな話題

Schützhold, Gies, & Dunne, Phys. Rev. Lett. (2008)

## ▶ 振動電場下のSchwinger効果 (assisted Schwinger effect)

… 強電場に弱い振動電場を加えると真空崩壊率や粒子生成数が劇的に増加する

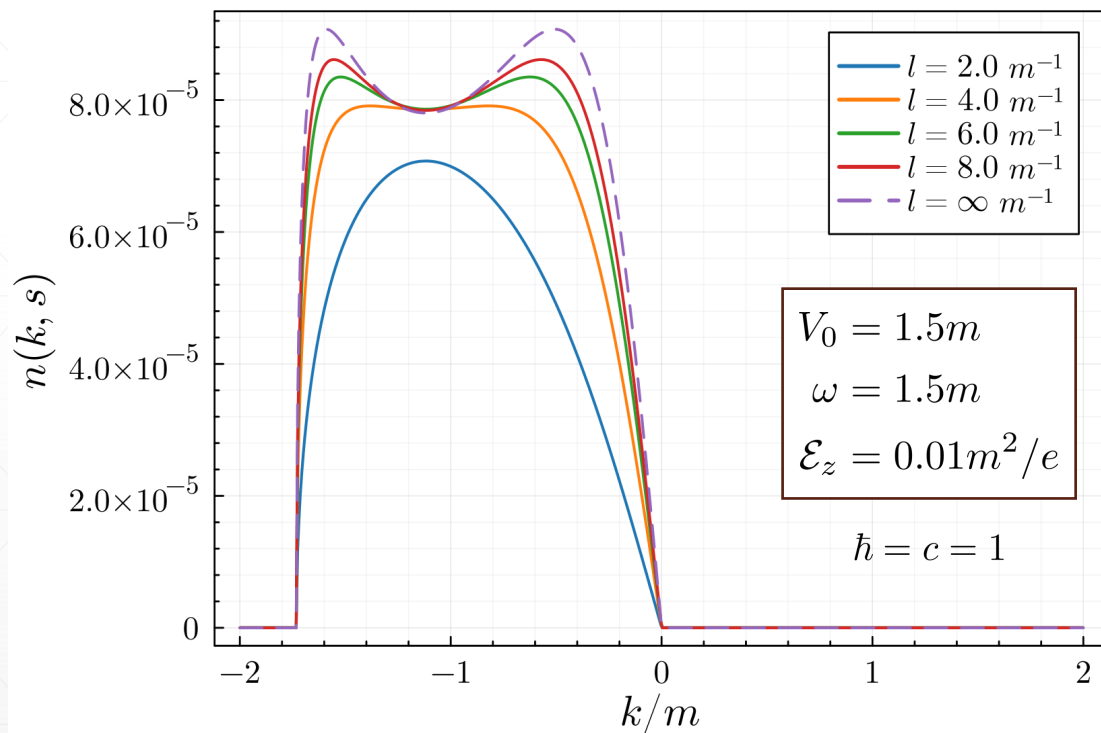


## ▶ 階段ポテンシャル & 振動電場下の真空崩壊

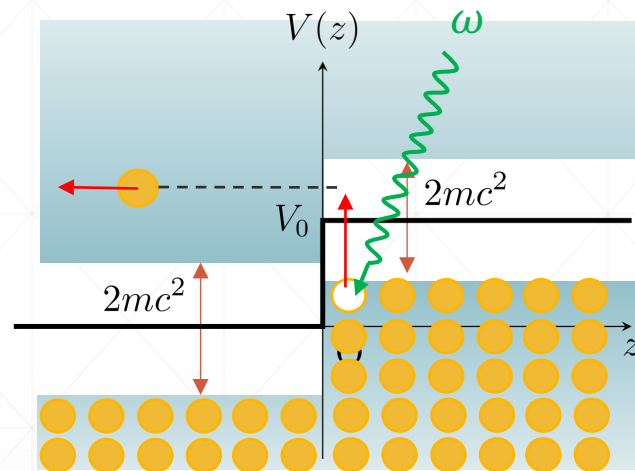
$z = 0$  に局在した  
デルタ関数型強電場

$z \sim 0$  付近に幅  $l$  で局在した  
周波数  $\omega$  の振動電場

単位体積あたりの生成粒子数の運動量分布



Ochiai, Prog. Theor. Exp. Phys. (2025)



- $V_0 < 2mc^2$  &  $\omega < 2mc^2$  でも  
真空から粒子が生成される

- 真空の不安定化条件  
 $V_0 + \omega > 2mc^2$

# 目次

## ▶ 導入

- ▶ Kleinトンネル効果 (Kleinパラドックス)

## ▶ 研究背景と目的

- ▶ Schwinger効果: 強電場下の真空崩壊

- ▶ 近年ホットな話題: 振動電場下のSchwinger効果

## ▶ 振動電場下のKleinトンネル効果

M. Ochiai and S. Shibayama, J. High Energ. Phys. **2025**, 172 (2025)

- ▶ 非定常散乱の議論

## ▶ まとめと展望

※以降、自然単位系  $\hbar = c = 1$  を用いる

# ①波束をどうやって記述するか

Schrödinger方程式に従う自由粒子の場合

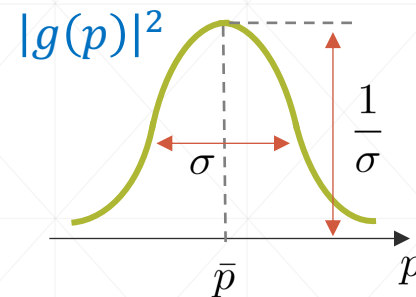
▶ 平面波状態を重み  $g(p) \propto \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \exp[-(p - \bar{p})^2 / (2\sigma^2)]$  で積分

$$\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dp g(p) e^{-i \frac{p^2}{2m} t + i p x}$$

$$\Rightarrow |\Psi(x, t)|^2 = \sqrt{\frac{\pi \sigma^2}{1 + \frac{\sigma^4}{m^2} t^2}} \exp\left[-\frac{\sigma^2}{1 + \frac{\sigma^4}{m^2} t^2} \left(x - \frac{\bar{p}}{m} t\right)^2\right]$$

➔ 粒子の存在確率分布  $|\Psi(x, t)|^2$  は

- $\bar{x} = (\bar{p}/m)t$  付近に局在
- 中心運動量  $\bar{p}$ , 波束の (実空間上の) 幅  $\sim 1/\sigma$



# 階段ポテンシャル下の波束

階段ポテンシャル下のSchrödinger方程式なら

▶ 散乱波動関数を重み  $g(p)$  で積分すれば波束が作られる

左方入射解  $\psi^{(E)}$  を用いて波束を作ると

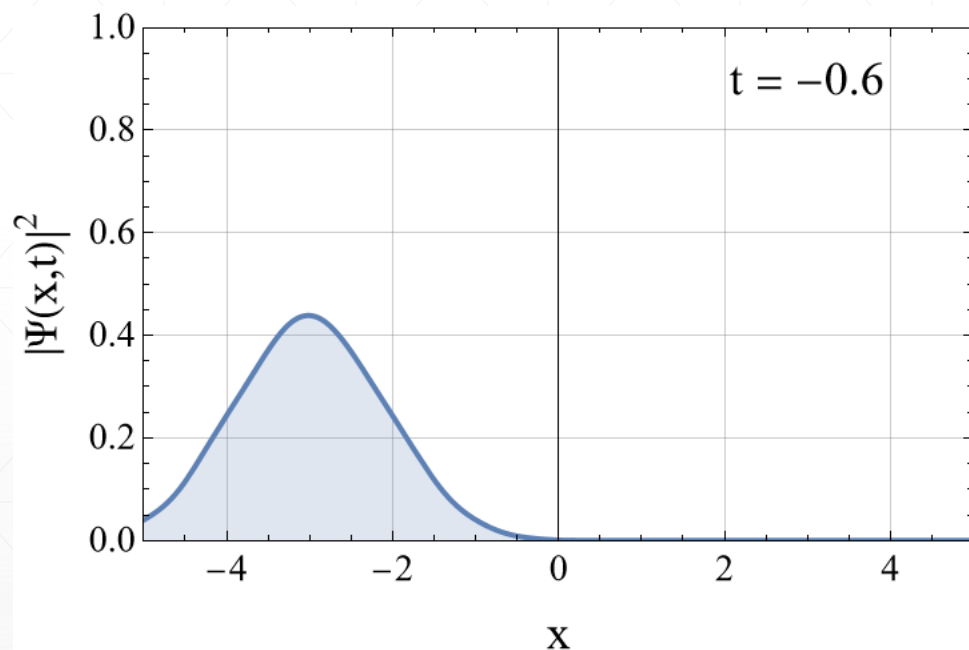
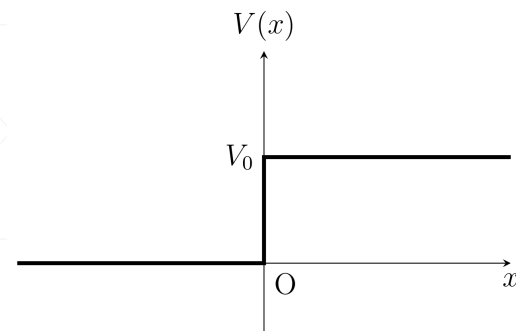
$$\Psi(x, t) = \int_0^{\infty} dp g(p) \psi^{(E)}(x) e^{-i \frac{p^2}{2m} t},$$

ただし

$$\psi^{(E)}(x) \propto \begin{cases} e^{ipx} + R e^{-ipx} & (x < 0) \\ T e^{iqx} & (x \geq 0) \end{cases}$$

※  $E \geq V_0$  のとき  $q \geq 0$ : 反射 or 透過

$0 \leq E < V_0$  のとき  $q = i\lambda$ : 全反射



# 階段ポテンシャル下の波束

階段ポテンシャル下のSchrödinger方程式なら

▶ 散乱波動関数を重み  $g(p)$  で積分すれば波束が作られる

左方入射解  $\psi^{(E)}$  を用いて波束を作ると

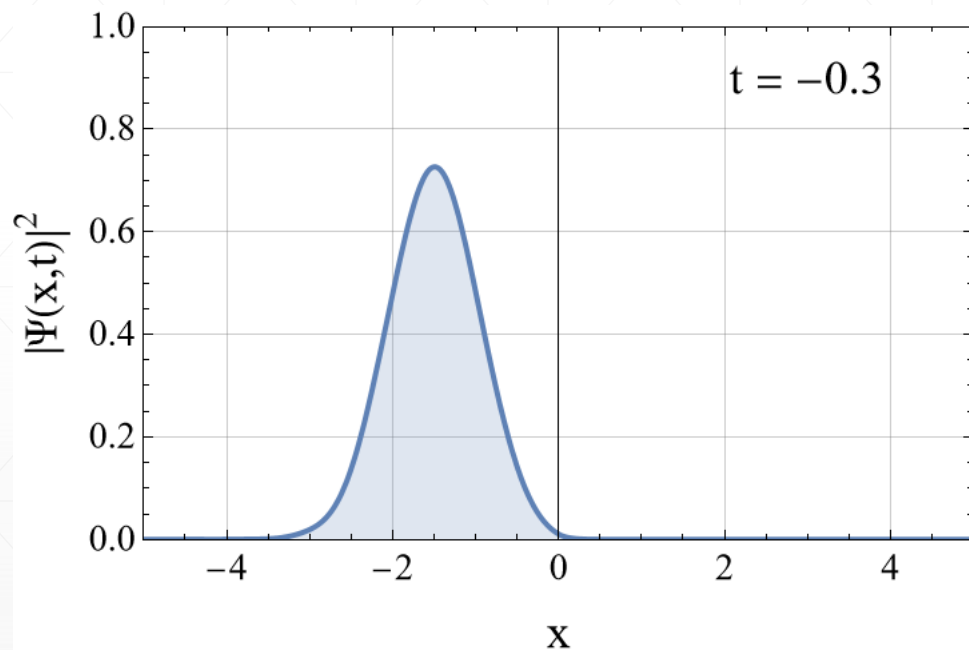
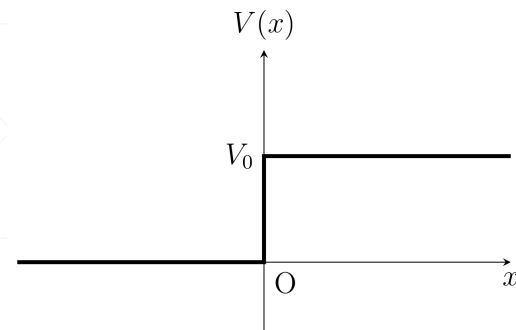
$$\Psi(x, t) = \int_0^{\infty} dp g(p) \psi^{(E)}(x) e^{-i \frac{p^2}{2m} t},$$

ただし

$$\psi^{(E)}(x) \propto \begin{cases} e^{ipx} + R e^{-ipx} & (x < 0) \\ T e^{iqx} & (x \geq 0) \end{cases}$$

※  $E \geq V_0$  のとき  $q \geq 0$ : 反射 or 透過

$0 \leq E < V_0$  のとき  $q = i\lambda$ : 全反射



# 階段ポテンシャル下の波束

階段ポテンシャル下のSchrödinger方程式なら

▶ 散乱波動関数を重み  $g(p)$  で積分すれば波束が作られる

左方入射解  $\psi^{(E)}$  を用いて波束を作ると

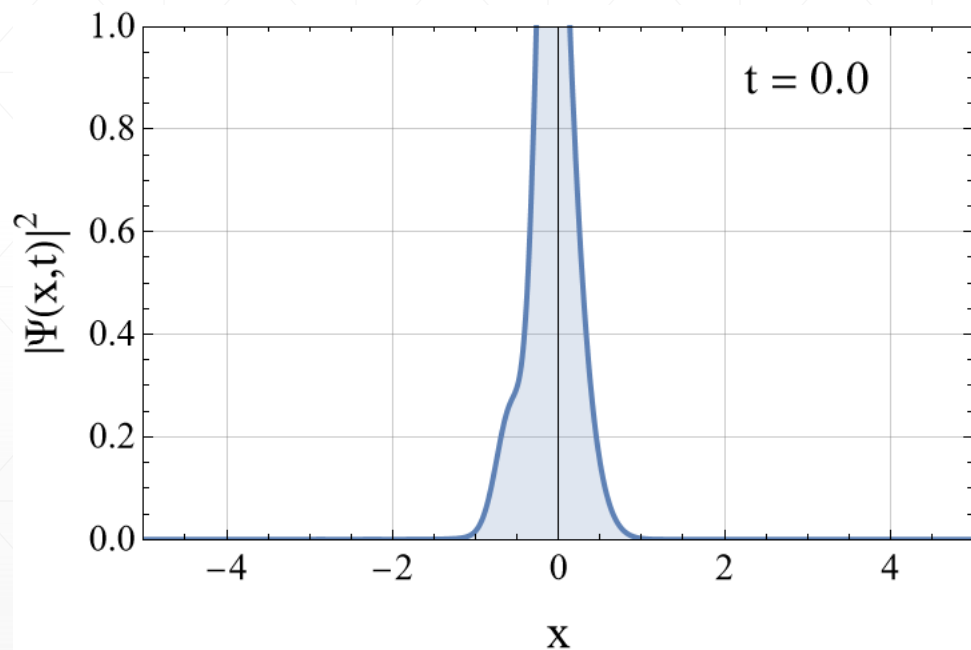
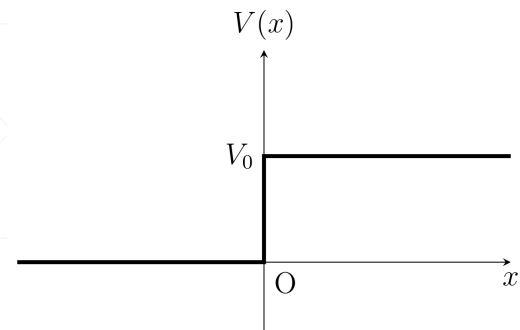
$$\Psi(x, t) = \int_0^{\infty} dp g(p) \psi^{(E)}(x) e^{-i \frac{p^2}{2m} t},$$

ただし

$$\psi^{(E)}(x) \propto \begin{cases} e^{ipx} + R e^{-ipx} & (x < 0) \\ T e^{iqx} & (x \geq 0) \end{cases}$$

※  $E \geq V_0$  のとき  $q \geq 0$ : 反射 or 透過

$0 \leq E < V_0$  のとき  $q = i\lambda$ : 全反射



# 階段ポテンシャル下の波束

階段ポテンシャル下のSchrödinger方程式なら

▶ 散乱波動関数を重み  $g(p)$  で積分すれば波束が作られる

左方入射解  $\psi^{(E)}$  を用いて波束を作ると

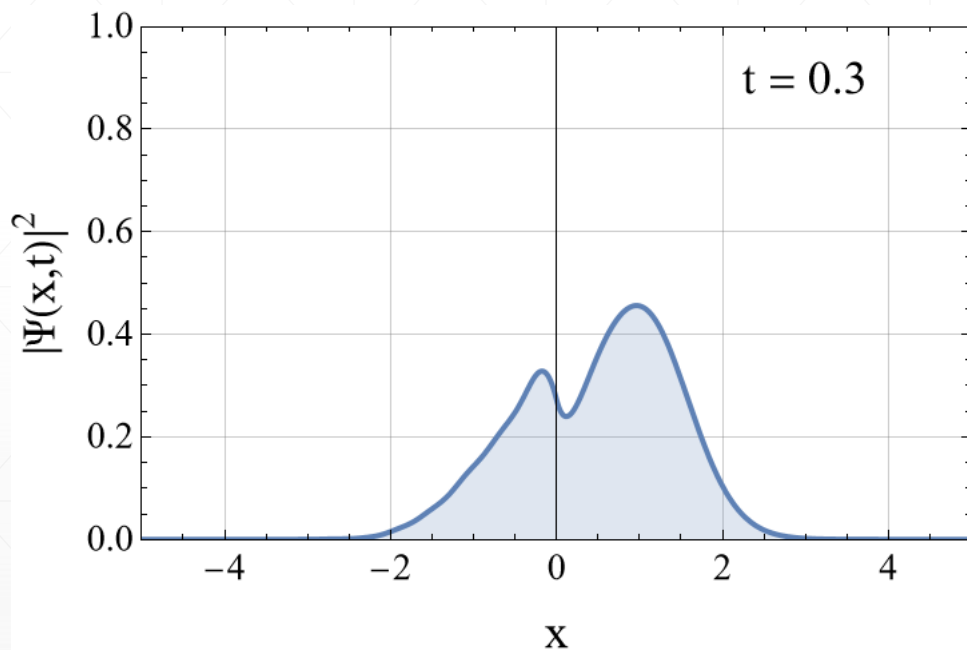
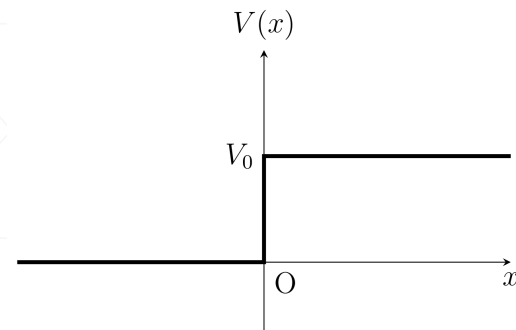
$$\Psi(x, t) = \int_0^{\infty} dp g(p) \psi^{(E)}(x) e^{-i \frac{p^2}{2m} t},$$

ただし

$$\psi^{(E)}(x) \propto \begin{cases} e^{ipx} + R e^{-ipx} & (x < 0) \\ T e^{iqx} & (x \geq 0) \end{cases}$$

※  $E \geq V_0$  のとき  $q \geq 0$ : 反射 or 透過

$0 \leq E < V_0$  のとき  $q = i\lambda$ : 全反射



# 階段ポテンシャル下の波束

階段ポテンシャル下のSchrödinger方程式なら

▶ 散乱波動関数を重み  $g(p)$  で積分すれば波束が作られる

左方入射解  $\psi^{(E)}$  を用いて波束を作ると

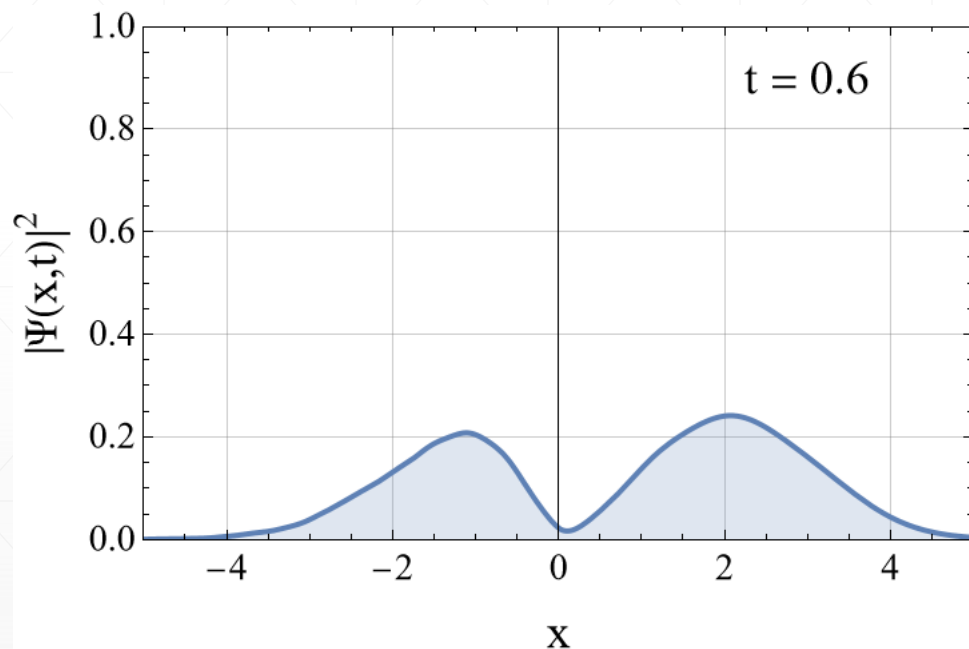
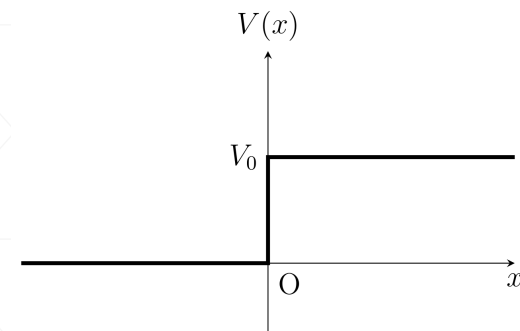
$$\Psi(x, t) = \int_0^{\infty} dp g(p) \psi^{(E)}(x) e^{-i \frac{p^2}{2m} t},$$

ただし

$$\psi^{(E)}(x) \propto \begin{cases} e^{ipx} + R e^{-ipx} & (x < 0) \\ T e^{iqx} & (x \geq 0) \end{cases}$$

※  $E \geq V_0$  のとき  $q \geq 0$ : 反射 or 透過

$0 \leq E < V_0$  のとき  $q = i\lambda$ : 全反射



# 階段ポテンシャル下の波束

階段ポテンシャル下のSchrödinger方程式なら

▶ 散乱波動関数を重み  $g(p)$  で積分すれば波束が作られる

左方入射解  $\psi^{(E)}$  を用いて波束を作ると

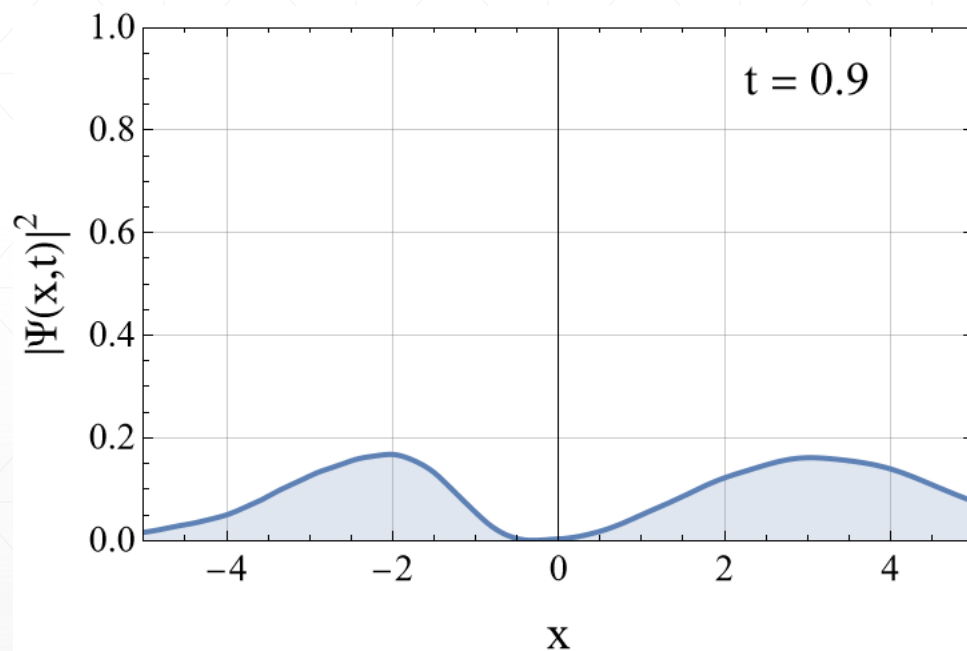
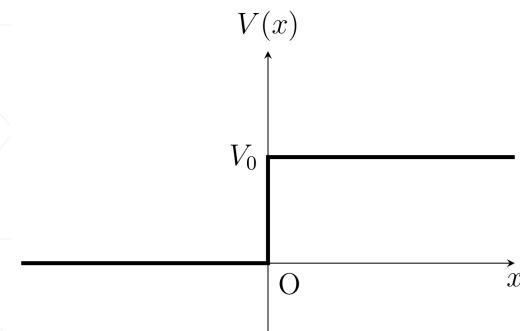
$$\Psi(x, t) = \int_0^{\infty} dp g(p) \psi^{(E)}(x) e^{-i \frac{p^2}{2m} t},$$

ただし

$$\psi^{(E)}(x) \propto \begin{cases} e^{ipx} + R e^{-ipx} & (x < 0) \\ T e^{iqx} & (x \geq 0) \end{cases}$$

※  $E \geq V_0$  のとき  $q \geq 0$ : 反射 or 透過

$0 \leq E < V_0$  のとき  $q = i\lambda$ : 全反射



# 散乱波動関数 (左方入射) $\psi_s^{(E)}$

(L1)  $E \geq V_0 + m$  : 反射 or 透過

$$\psi_s^{(E)}(z) \propto \begin{cases} u(p, s)e^{ipz} + R_{\rightarrow}(p)u(-p, s)e^{-ipz} & (z < 0) \\ T_{\rightarrow}(p)u(q, s)e^{iqz} & (z \geq 0) \end{cases}$$

ただし  $E = E_p = V_0 + E_q$ ,  $p, q \geq 0$ ,

$$|R_{\rightarrow}(p)|^2 + \frac{q}{p}|T_{\rightarrow}(p)|^2 = 1.$$

(L2)  $V_0 - m \leq E < V_0 + m$  : 全反射

(L3)  $m \leq E < V_0 - m$  : Klein トンネル効果

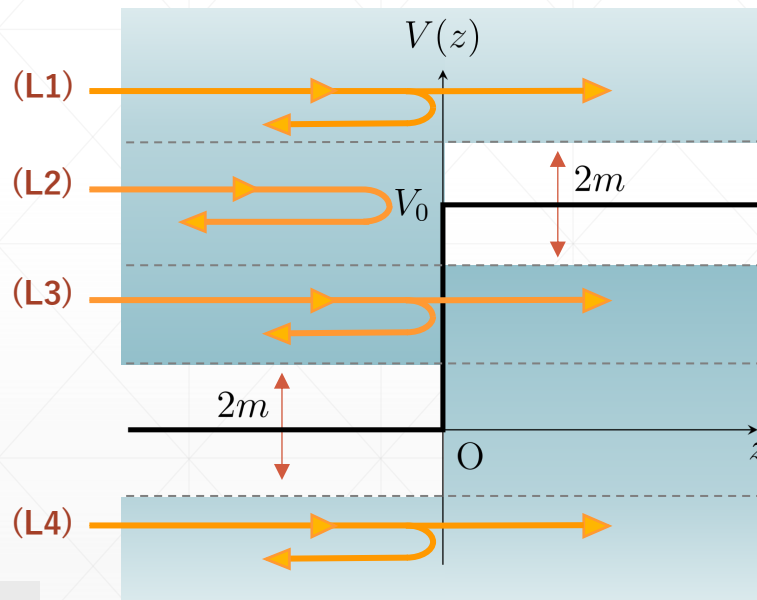
$u(q, s)e^{iqz}$  を  $v(q, \tilde{s})e^{-iqz}$  に置き換えた解

(L4)  $E \leq -m$  : 反射 or 透過

※ 波束  $\Psi(z, t)$  は(L1)~(L3)の重ね合わせで作る

$$\Psi(z, t) = \int_0^{\infty} dp g(p) \psi_s^{(E)}(z) e^{-iEt},$$

$$E = E_p (= \sqrt{p^2 + m^2}) \geq m$$



# 散乱波動関数 (右方入射) $\phi_s^{(E)}$

(R1)  $E \geq V_0 + m$  : 反射 or 透過

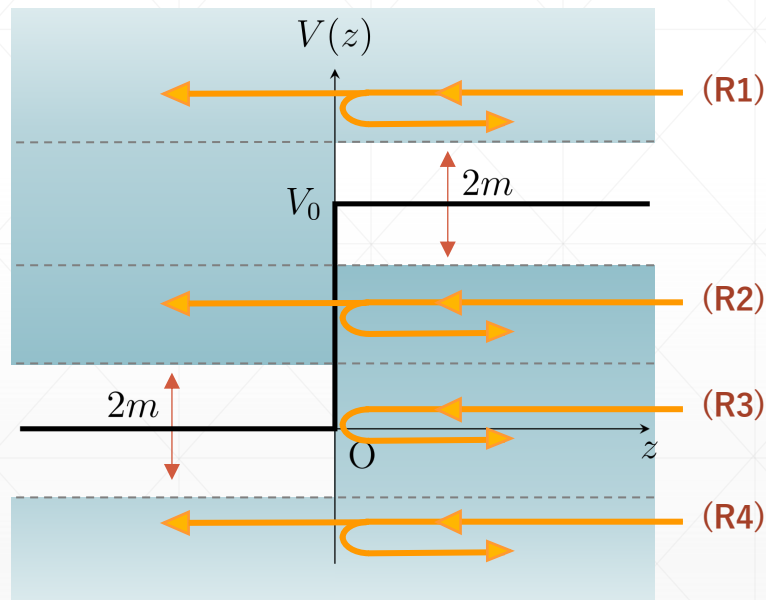
$$\phi_s^{(E)}(z) \propto \begin{cases} T_{\leftarrow}(q)u(-p, s)e^{-ipz} & (z < 0) \\ u(-q, s)e^{-iqz} + R_{\leftarrow}(p)u(q, s)e^{iqz} & (z \geq 0) \end{cases}$$

ただし  $E = E_p = V_0 + E_q, \quad p, q \geq 0,$   
 $|R_{\leftarrow}(q)|^2 + \frac{p}{q}|T_{\leftarrow}(q)|^2 = 1.$

(R2)  $m < E \leq V_0 - m$  : Kleinトンネル効果

(R3)  $-m < E \leq m$  : 全反射

(R4)  $E \leq -m$  : 反射 or 透過



## ②波束の反射率・透過率をどう定義するか $\alpha_z = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$

▶ Dirac方程式から連続の式が導かれる

$$i\partial_t \Psi(z, t) = (H_{\text{Dirac}} + V(z))\Psi(z, t), \quad H_{\text{Dirac}} = -i\alpha_z \partial_z + \beta m$$

→ 連続の式  $\partial_t \rho + \partial_z J_z = 0,$

ただし 確率密度:  $\rho(z, t) = \Psi^\dagger(z, t)\Psi(z, t),$

カレントの  $z$   $J_z(z, t) = \Psi^\dagger(z, t)\alpha_z\Psi(z, t)$

成分:

▶ 確率の総和は一定 (=1に規格化)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dz \rho(z, t) &= \int_0^{\infty} dp dp' g^*(p)g(p') e^{i(E_p - E_{p'})t} \int_{-\infty}^{\infty} dz \psi_s^{(E_p)\dagger}(z)\psi_s^{(E_{p'})}(z) \\ &= \int_0^{\infty} dp |g(p)|^2 \quad \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dz \psi_s^{(E_p)\dagger}(z)\psi_s^{(E_{p'})}(z)}_{= \delta(p - p')} \quad \text{∴ 散乱波動関数の正規直交性} \\ &= 1. \quad \text{↙ } g(p) \text{ の規格化} \end{aligned}$$

※連続の式は振動電場をさらに加えても成立する

連続の式  $\partial_t \rho + \partial_z J_z = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_{z_L}^{z_R} dz \rho(z, t) = - \left[ J_z(z, t) \right]_{z_L}^{z_R}$   
 を踏まえると

▶ 入射カレントの総量  $\rho(z, -\infty) = 0$   $z_R$ -independent

$$\int_{-\infty}^{t_0} dt J_z(z_L, t) = \int_{-\infty}^{t_0} dt J_z(z_R, t) + \int_{z_L}^{z_R} dz \rho(z, t) = \int_{z_L}^{\infty} \rho(z, t_0),$$

▶ 散乱カレントの総量  $\rho(z, \infty) = 0$

$$\int_{t_1}^{\infty} dt (J_z(z_R, t) - J_z(z_L, t)) = \int_{z_L}^{z_R} dz \rho(z, t_1)$$

➔ 測定点  $z_L \rightarrow -\infty, z_R \rightarrow \infty$  とする極限で波束のカレントは保存するはず

$$\lim_{z_L \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^{t_0} dt J_z(z_L, t) = \lim_{\substack{z_L \rightarrow -\infty \\ z_R \rightarrow \infty}} \int_{t_1}^{\infty} dt (J_z(z_R, t) - J_z(z_L, t))$$

$$\therefore P_{\text{refl}} + P_{\text{trans}} = 1.$$

# 反射率・透過率の計算

▶ 測定点  $z_L < 0$  で測定された反射カレントの総量

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_1}^{\infty} dt J_z(z_L, t) \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{dp dp'}{2\pi} \frac{m}{\sqrt{E_p E_{p'}}} \frac{i}{E_p - E_{p'} + i0_+} e^{i(E_p - E_{p'})t_1} \\
 & \times \left\{ u^\dagger(p, s) \alpha_z u(p', s) e^{-i(p-p')z_L} + R_{\rightarrow}^*(p) R_{\rightarrow}(p') u^\dagger(-p, s) \alpha_z u(-p', s) e^{i(p-p')z_L} \right. \\
 & \quad \left. + R_{\rightarrow}(p') u^\dagger(p, s) \alpha_z u(-p', s) e^{-i(p+p')z_L} + R_{\rightarrow}^*(p) u^\dagger(-p, s) \alpha_z u(p', s) e^{i(p+p')z_L} \right\}
 \end{aligned}$$

半無限区間  $[t_1, \infty)$  の時間積分から出てくる超関数 ( $0_+$ : 正の無限小)

▶ {...}内の項はそれぞれ

- 第1項: 入射波によるカレント
- 第2項: 反射波によるカレント
- 第3項、第4項: 入射波と反射波の干渉項

※干渉項は  $z_L \rightarrow -\infty$  で振動が無限に激しくなって消える (Riemann-Lebesgueの補題)

※残りの第1項と第2項は  $p = p'$  のとき非自明

$$J_z(z, t) = \Psi^\dagger(z, t) \alpha_z \Psi(z, t),$$

$$\Psi(z, t) = \int_0^{\infty} dp g(p) \psi_s^{(E)}(z) e^{-iE_p t}$$

$$\lim_{z_L \rightarrow -\infty} \int_{t_1}^{\infty} dt J_z(z_L, t) = \lim_{z_L \rightarrow -\infty} \int_0^{\infty} \frac{dp dp'}{2\pi} \frac{m}{\sqrt{E_p E_{p'}}} \frac{i}{E_p - E_{p'} + i0_+} e^{i(E_p - E_{p'})t_1}$$

$$\times \left\{ u^\dagger(p, s) \alpha_z u(p', s) e^{-i(p-p')z_L} + R_{\rightarrow}^*(p) R_{\rightarrow}(p') u^\dagger(-p, s) \alpha_z u(-p', s) e^{i(p-p')z_L} \right\}$$

▶ 性質の良い関数  $f(k)$  に対して次の極限評価ができる

$$\lim_{z_L \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk f(k) \frac{i}{k + i0_+} e^{\pm i k z_L} = \lim_{z_L \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{z_L} f\left(\frac{\xi}{z_L}\right) \frac{i}{k + i0_+} e^{\pm i \xi}$$

$\xi = k z_L$

$$= -f(0) \lim_{z_L \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{i}{\xi - i0_+} e^{\pm i \xi}$$

$$= 2\pi f(0) \quad \text{or} \quad 0.$$

$$\therefore \lim_{z_L \rightarrow -\infty} \frac{i}{k + i0_+} e^{\pm i k z_L} = 2\pi \delta(k) \quad \text{or} \quad 0.$$

▶ 極限  $z_L \rightarrow -\infty$  で入射波の寄与は消え、反射波の寄与だけが残る

$$\lim_{z_L \rightarrow -\infty} \int_{t_1}^{\infty} dt J_z(z_L, t) = - \int_0^{\infty} dp |g(p)|^2 |R_{\rightarrow}(p)|^2.$$

# 振動電場もある場合

- ▶ 階段ポテンシャル & ベクトルポテンシャル下のDirac方程式

$$i\partial_t\Psi(z,t) = H\Psi(z,t),$$

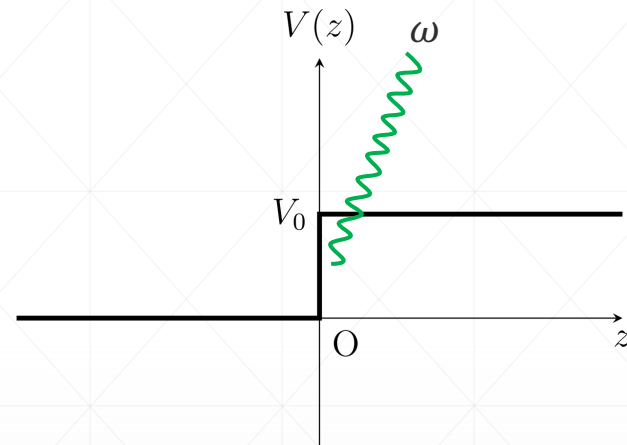
$$\begin{aligned} \text{ただし } H &= \alpha_z(-i\partial_z - eA_z(z,t)) + \beta m + V(z) \\ &= H_{\text{Dirac}} + V(z) - e\alpha_z A_z(z,t) \end{aligned}$$

• 階段ポテンシャル  $V(z) = \begin{cases} V_0 & (z \geq 0) \\ 0 & (z < 0) \end{cases}$

↪  $z = 0$  に局在したデルタ関数型強電場

• ベクトルポテンシャル  $A_z(z,t) = \frac{\mathcal{E}_z}{\omega} \sin(\omega t) e^{-(z/l)^2}$

↪  $z \sim 0$  付近に幅  $l$  で局在した周波数  $\omega$  の振動電場



- ▶ Dirac方程式の解を遅延Green関数  $S_{ret}(z, t; z', t')$  を用いた摂動級数で表示

$$\Psi(z, t) = \Psi^{(0)}(z, t) + \Psi^{(1)}(z, t) + \Psi^{(2)}(z, t) + \mathcal{O}(A_z^3),$$

ただし 
$$\Psi^{(0)}(z, t) = \int_0^\infty dp g(p) \psi_s^{(E_p)}(z) e^{-iE_p t},$$

$$\Psi^{(1)}(z, t) = e \int_{-\infty}^\infty dz' dt' S_{ret}(z, t; z', t') \gamma_z A_z(z', t') \Psi^{(0)}(z', t'), \quad (\gamma_z = \beta \alpha_z)$$

$$\begin{aligned} \Psi^{(2)}(z, t) = e^2 \int_{-\infty}^\infty dz' dt' S_{ret}(z, t; z', t') \gamma_z A_z(z', t') \\ \times \int_{-\infty}^\infty dz'' dt'' S_{ret}(z', t'; z'', t'') \gamma_z A_z(z'', t'') \Psi^{(0)}(z'', t''). \end{aligned}$$

- ▶ 波束のカレント  $J_z(z, t) = \Psi^\dagger(z, t) \alpha_z \Psi(z, t)$  を摂動計算 → 反射率 & 透過率を評価

$$J_z^{(0)}(z, t) = \Psi^{(0)\dagger}(z, t) \alpha_z \Psi^{(0)}(z, t), \quad \text{※ 0次はこれまでの議論で評価済み}$$

$$J_z^{(1)}(z, t) = 2\text{Re}\{\Psi^{(0)\dagger}(z, t) \alpha_z \Psi^{(1)}(z, t)\},$$

$$J_z^{(2)}(z, t) = \Psi^{(1)\dagger}(z, t) \alpha_z \Psi^{(1)}(z, t) + 2\text{Re}\{\Psi^{(0)\dagger}(z, t) \alpha_z \Psi^{(2)}(z, t)\}.$$

# 散乱モードの遷移

▶ 1次摂動解を具体的に書き下すと

$$\Psi^{(1)}(z, t) \propto \int_0^\infty dp g(p) \sum_{s', \epsilon, \epsilon' = \pm} \left\{ \int_0^\infty dp' \psi_{s'}^{(\epsilon' E_{p'})}(z, t) \langle \psi_{s'}^{(\epsilon' E_{p'})}, \psi_s^{(E_p)} \rangle \int_{-\infty}^t dt' e^{i(\epsilon' E_{p'} + \epsilon \omega - E_p)t'} \right. \\ \left. + \int_0^\infty dq' \phi_{s'}^{(V_0 + \epsilon' E_{q'})}(z, t) \langle \phi_{s'}^{(V_0 + \epsilon' E_{q'})}, \psi_s^{(E_p)} \rangle \int_{-\infty}^t dt' e^{i(V_0 + \epsilon' E_{q'} + \epsilon \omega - E_p)t'} \right\},$$

$$\text{ただし } \langle \psi_{s'}^{(\epsilon' E_{p'})}, \psi_s^{(E_p)} \rangle = \int_{-\infty}^\infty dz \psi_{s'}^{(\epsilon' E_{p'})\dagger}(z) \alpha_z \psi_s^{(E_p)}(z) e^{-(z/l)^2}.$$

2つの散乱波動関数とベクトルポテンシャルの重なり積分

▶ 振動電場が波束にエネルギー  $\pm\omega$  を与えることによって、

$\Psi^{(0)}$  に含まれていた散乱モード  $\psi_s^{(E_p)}$  が別の散乱モード  $\psi_{s'}^{(\epsilon' E_{p'})}$ ,  $\phi_{s'}^{(V_0 + \epsilon' E_{q'})}$  に遷移

# 目次

## ▶ 導入

- ▶ Kleinトンネル効果 (Kleinパラドックス)

## ▶ 研究背景と目的

- ▶ Schwinger効果: 強電場下の真空崩壊

- ▶ 近年ホットな話題: 振動電場下のSchwinger効果

## ▶ 振動電場下のKleinトンネル効果

M. Ochiai and S. Shibayama, J. High Energ. Phys. **2025**, 172 (2025)

- ▶ 非定常散乱の議論

## ▶ まとめと展望