

# 時間は量子測定が誘導する演算子だった： ガウス波束POVMと李・筒井形式で迫る時間の謎

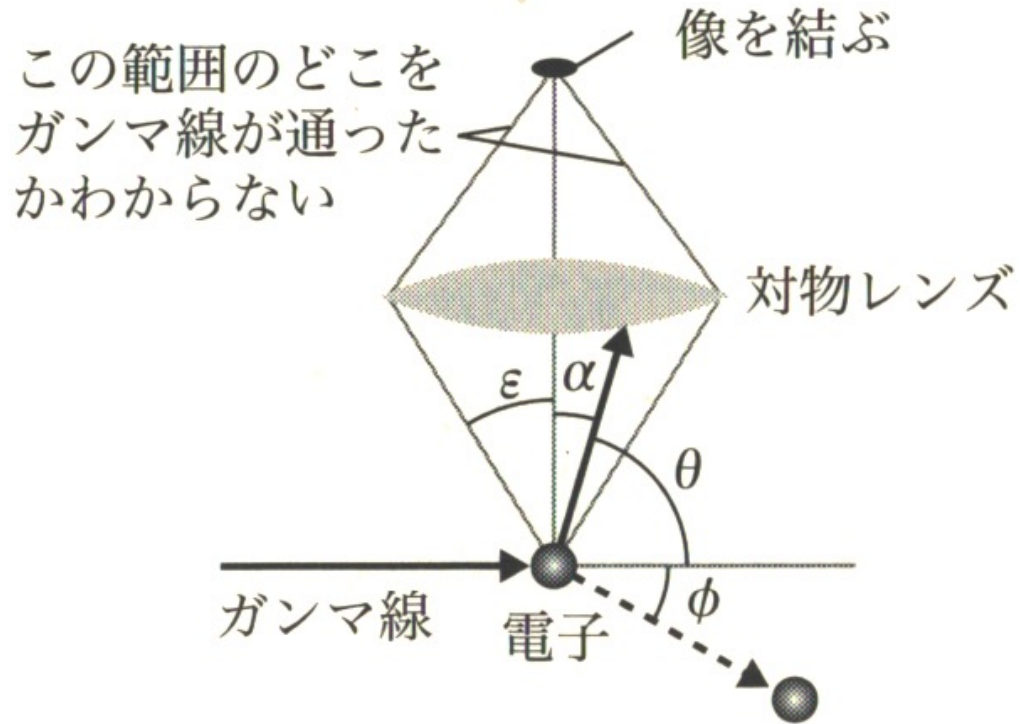
東京女子大 理学研究科 D1

小川 直哉

PTEP(2025), 063A02 and  
ongoing work with 尾田欣也



# 当初のハイゼンベルクの実験：位置の測定誤差と運動量が受ける擾乱



「アインシュタイン vs 量子力学」(森田邦久著, 化学同人, 2015年) より引用



ハイゼンベルクの写真  
by unknown author  
[File:Bundesarchiv Bild183-R57262, Werner Heisenberg.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bundesarchiv_Bild183-R57262,_Werner_Heisenberg.jpg)  
- [Wikimedia Commons](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bundesarchiv_Bild183-R57262,_Werner_Heisenberg.jpg)

## ハイゼンベルクの不平等式

$$\varepsilon[\hat{x}] \eta[\hat{p}_x] \geq \frac{\hbar}{2}$$

# 他の主な不確定性関係

ケナード・ワイル・ロバートソン

$$\sigma[\hat{x}]\sigma[\hat{p}_x] \geq \frac{\hbar}{2}$$

内在的な揺らぎのみ

小澤

$$\varepsilon^0[\hat{A}]\varepsilon^0[\hat{B}] + \varepsilon^0[\hat{A}]\sigma[\hat{B}] + \sigma[\hat{A}]\varepsilon^0[\hat{B}] \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|$$

内在的な揺らぎだけでなく 測定誤差 (と 擾乱)

# 時間について

- 量子力学では通常、時間はパラメータ
- 時間とエネルギーの不確定性関係はさまざまな議論の対象となってきた
- Aharonov と Bohm による粒子の到着時刻を表す対称作用素（≠自己共役演算子）（cf）Pauli の定理）

$$\widehat{T}_{AB} = \frac{m}{2} \left( \widehat{p}_x^{-1} \widehat{x} + \widehat{x} \widehat{p}_x^{-1} \right) \quad \left[ \widehat{T}_{AB}, \widehat{H}_{\text{free}} \right] = -i\hbar$$

# 発表の流れ

## 1. 準備

1. 李・筒井形式の紹介
2. 位置と運動量についての結果

## 2. 時間について進行中の結果

1. コンセプト
2. 点測定器
3. ガウス波束測定器

## 3. まとめ・展望

# 発表の流れ

## 1. 準備

1. 李・筒井形式の紹介
2. 位置と運動量についての結果

## 2. 時間について進行中の結果

1. コンセプト
2. 点測定器
3. ガウス波束測定器

## 3. まとめ・展望

# 発表の流れ

## 1. 準備

1. 李・筒井形式の紹介
2. 位置と運動量についての結果

## 2. 時間について進行中の結果

1. コンセプト
2. 点測定器
3. ガウス波束測定器

## 3. まとめ・展望

	物理量	状態
古典	実関数 $f(\omega) \in R(\Omega)$	確率密度関数 $p(\omega) \in W(\Omega)$
量子	自己共役演算子 $\hat{A} \in S(\mathcal{H})$	密度演算子 $\hat{\rho} \in Z(\mathcal{H})$

	期待値	半ノルム	半内積
古典	$\langle f \rangle_p := \int_{\Omega} d\omega f(\omega)p(\omega)$	$\ f\ _p^2 := \langle f^2 \rangle_p$	$\langle f, g \rangle_p := \langle fg \rangle_p$
量子	$\langle \hat{A} \rangle_{\hat{\rho}} := \text{Tr}[\hat{A}\hat{\rho}]$	$\ \hat{A}\ _{\hat{\rho}}^2 := \langle \hat{A}^2 \rangle_{\hat{\rho}}$	$\langle \hat{A}, \hat{B} \rangle_{\hat{\rho}} := \left\langle \frac{\{\hat{A}, \hat{B}\}}{2} \right\rangle_{\hat{\rho}}$

# 測定写像

量子測定を表す抽象的な写像

- 測定写像  $M$  :
  - $Z(\mathcal{H})$  ( $\exists \hat{\rho}$ ) から  $W(\Omega)$  ( $\exists p$ ) への写像
  - (確率混合について考えたい場合は) **アフィン性** :

$$M(\lambda \hat{\rho}_1 + (1 - \lambda) \hat{\rho}_2) = \lambda M(\hat{\rho}_1) + (1 - \lambda) M(\hat{\rho}_2)$$

$\lambda \in [0, 1]$

以下では  $M(\hat{\rho})$  を  $M\hat{\rho}$  と表す

# 李・筒井の随伴（引き戻し）

測定写像  $M$  は、与えられた古典物理量  $f$  と任意の量子状態  $\hat{\rho}$  についての李・筒井の随伴（引き戻し） $\widehat{M}^*f$  を誘導する：

$$\langle \widehat{M}^*f \rangle_{\hat{\rho}} = \langle f \rangle_{M\hat{\rho}}$$

古典的観測量を測定を介して量子側へ引き戻すことで演算子として定義  
(時間を考えるときに重要)

# 発表の流れ

## 1. 準備

1. 李・筒井形式の紹介
2. 位置と運動量についての結果

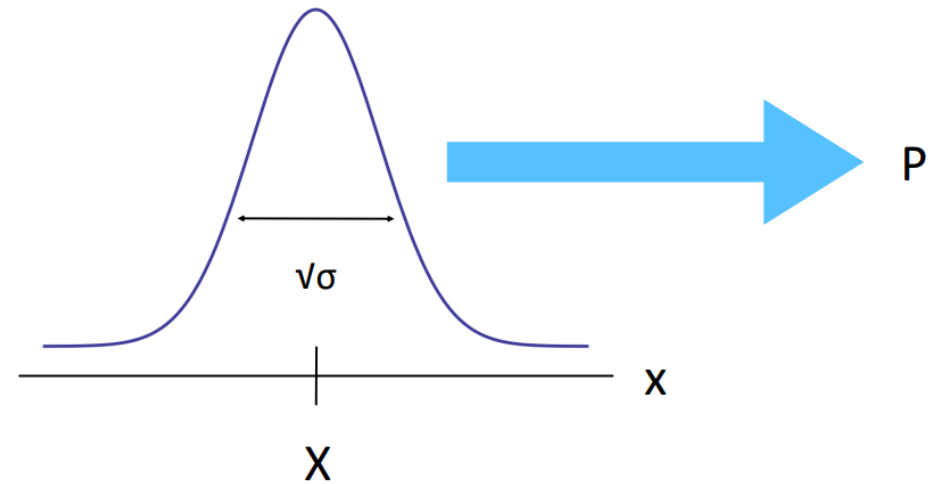
## 2. 時間について進行中の結果

1. コンセプト
2. 点測定器
3. ガウス波束測定器

## 3. まとめ・展望

# ガウス波束基底 $\{|X, P; \sigma\rangle\}$ (伏見分布)

- 位置について幅  $\sqrt{\sigma}$ , 運動量について幅  $\sqrt{1/\sigma}$
- ガウス分布的に局在している状態の集合
- 基底を成す
- 非直交、過完備



# 運動量表示

$$\langle p|X, P; \sigma\rangle := \left(\frac{\sigma}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-ipX - \frac{\sigma}{2}(p - P)^2\right)$$

非直交

$$\begin{aligned} &\langle X, P; \sigma | X', P'; \sigma \rangle \\ &= \exp\left(i \frac{P+P'}{2} (X - X') - \frac{(X-X')^2}{4\sigma} - \frac{\sigma}{4} (P - P')^2\right) \end{aligned}$$

# ガウス波束 POVM

$$\mathbb{R}^2 := \{(X, P)\}$$

➤  $\{|X, P; \sigma\rangle\langle X, P; \sigma|\}_{\mathbb{R}^2}$  は **POVM** :

$$|X, P; \sigma\rangle\langle X, P; \sigma| \geq 0, \quad (\text{正值性})$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{dx dp}{2\pi} |X, P; \sigma\rangle\langle X, P; \sigma| = \hat{1} \quad (\text{完全性})$$

➤ ガウス波束基底による **POVM 測定**  $M$  :

➤ 状態  $\hat{\rho}$  の下で  $(X, P)$  を得る測定確率は

$$\text{Tr}[|X, P; \sigma\rangle\langle X, P; \sigma| \hat{\rho}]$$

➤ **位置と運動量の同時測定の有効な手段**

# モデル

- 純粋なガウス波束基底状態：

$$\hat{\rho}_{\text{in}} := |X_{\text{in}}, P_{\text{in}}; \sigma_{\text{in}}\rangle\langle X_{\text{in}}, P_{\text{in}}; \sigma_{\text{in}}|$$

- 別のガウス波束基底による位置と運動量の同時測定  $M$
- 李・筒井の不等式と李の不等式をそれぞれ計算

# 李・筒井の誤差

$$\varepsilon^2[\hat{x}] = \frac{\sigma_{\text{red}}}{2}, \quad \varepsilon^2[\hat{p}] = \frac{1}{2\sigma_{\text{sum}}}$$

測定器と初期状態の両方のガウス波束の幅に依存

# 李・筒井の不等式

$$(\varepsilon[\hat{x}]\varepsilon[\hat{p}_x] =) \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma_{\text{red}}}{\sigma_{\text{sum}}}} \geq 0$$

下限は射影測定になる極限である  $\sigma \rightarrow 0$  または  $\sigma \rightarrow \infty$  のときに達成

# 李の誤差

$$\tilde{\varepsilon}^2[\hat{x}] = \frac{\sigma}{2}, \quad \tilde{\varepsilon}^2[\hat{p}] = \frac{1}{2\sigma}$$

測定器のガウス波束の幅のみに依存  
入射状態のガウス波束の幅には依存しない

# 李の不等式

$$(\tilde{\varepsilon}[\hat{x}] \tilde{\varepsilon}[\hat{p}_x] =) \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

**通常の不確定性原理の下限を与え、かつ等号を常に達成**

# Oda Ogawa(2025) からの引用

「It would be fascinating to explore the time-energy uncertainty relation on this ground.」

**その“fascinating”を実際にやった**  
ただし同時測定ではなく **到着時刻測定**で

# 発表の流れ

## 1. 準備

1. 李・筒井形式の紹介
2. 位置と運動量についての結果

## 2. 時間について進行中の結果

1. コンセプト
2. 点測定器
3. ガウス波束測定器

## 3. まとめ・展望

# 発表の流れ

## 1. 準備

1. 李・筒井形式の紹介
2. 位置と運動量についての結果

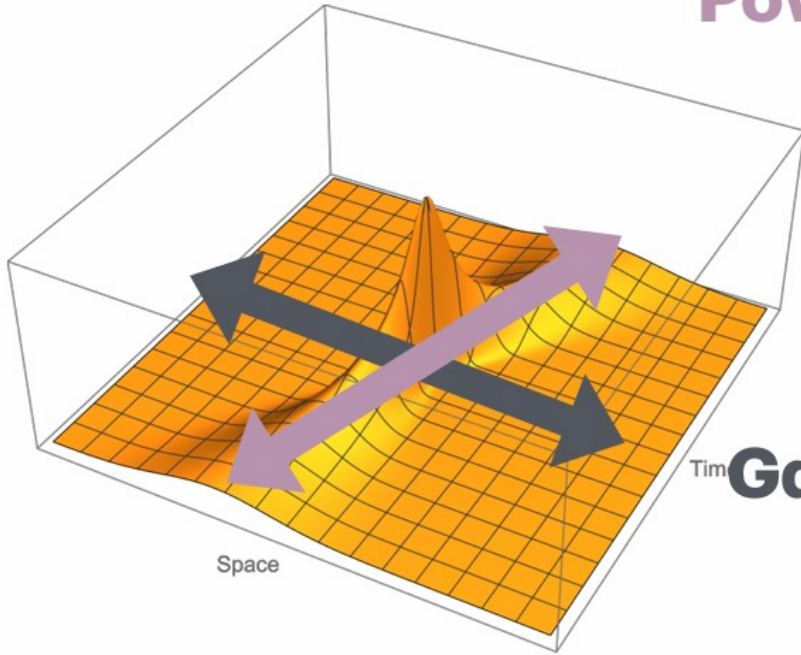
## 2. 時間について進行中の結果

1. コンセプト
2. 点測定器
3. ガウス波束測定器

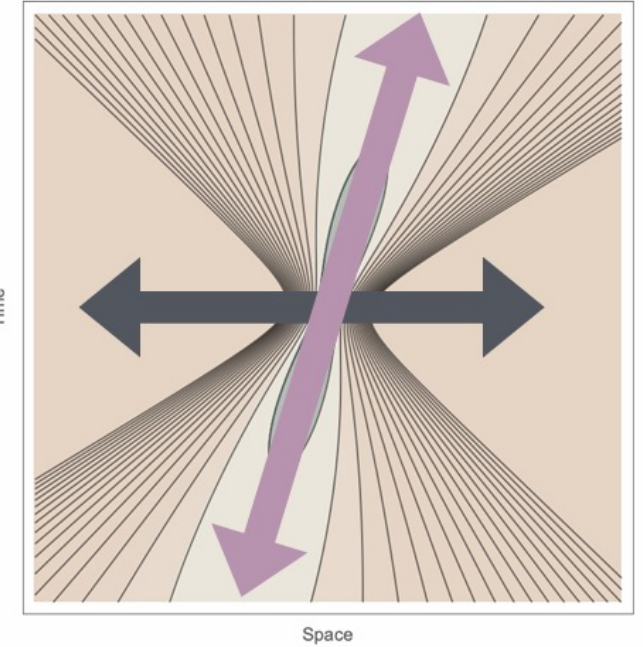
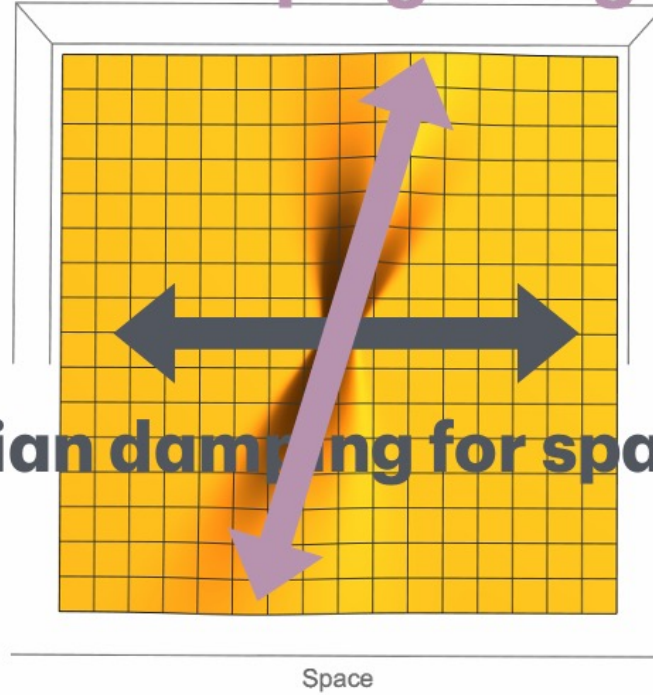
## 3. まとめ・展望

# 時間並進したガウス波束基底 $\{|\vec{X}, P; \sigma\rangle\}$

Power-law damping along trajectory



Gaussian damping for space



$$|\vec{X}, P; \sigma\rangle = e^{i\widehat{H}_{\text{free}} t} |X, P; \sigma\rangle$$

$$\widehat{H}_{\text{free}} := \frac{\hat{p}^2}{2m}$$

$\mathbf{X}(t) := \mathbf{X} + \frac{\mathbf{P}}{m}(t - T)$  の周りに幅  $\sigma + \frac{(t-T)^2}{\sigma m^2}$  で局在している

# 時間並進されたガウス波束基底の運動量表示

$$\langle p | \vec{X}, \mathbf{P}; \sigma \rangle := \left( \frac{\sigma}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} \exp \left( iE(\mathbf{p})T - i\mathbf{p} \cdot \mathbf{X} - \frac{\sigma}{2} (\mathbf{p} - \mathbf{P})^2 \right)$$

非直交

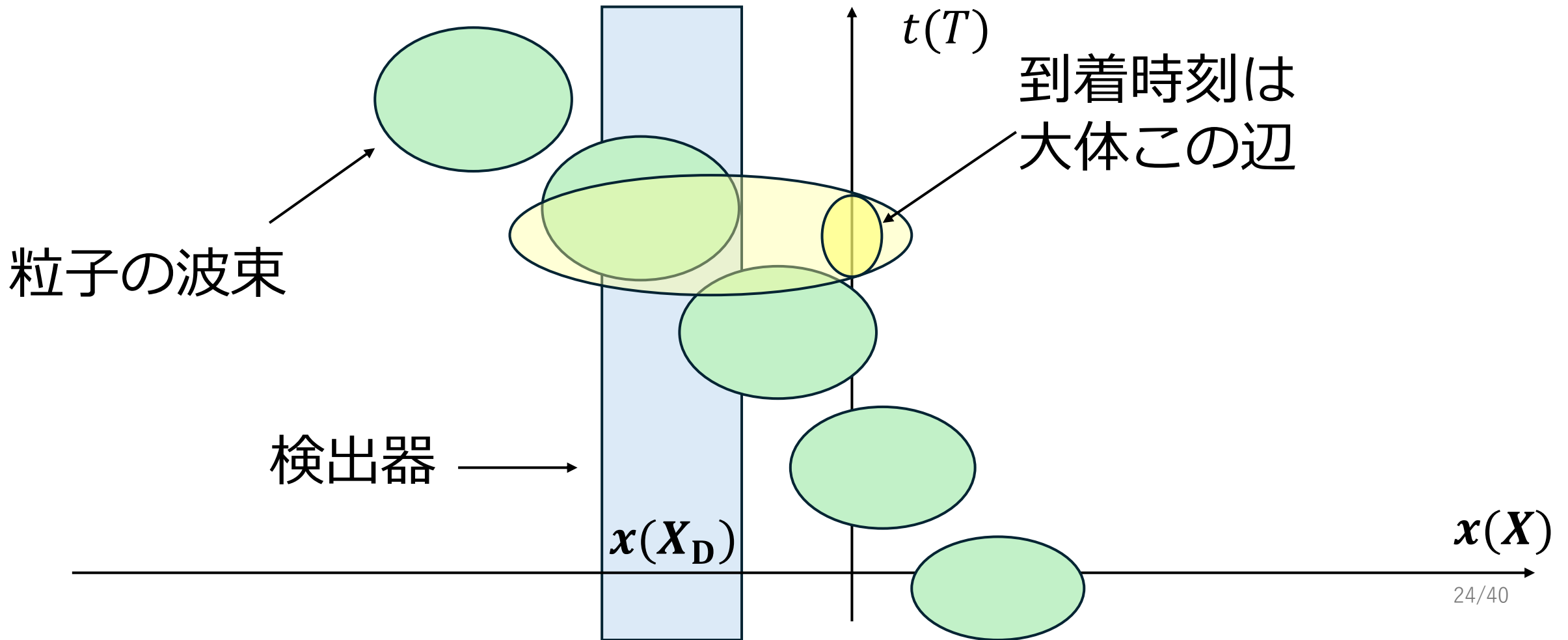
$$E(\mathbf{p}) := \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$$

$$\langle T, \mathbf{X}', \mathbf{P}'; \sigma | T, \mathbf{X}, \mathbf{P}; \sigma \rangle$$

$$= \exp \left( i \frac{\mathbf{P} + \mathbf{P}'}{2} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}') - \frac{(\mathbf{X} - \mathbf{X}')^2}{4\sigma} - \frac{\sigma}{4} (\mathbf{P} - \mathbf{P}')^2 \right)$$

# コンセプト

位置  $x(X_D)$  に測定器があり、そこに粒子が到着する時刻を測ることを考える



# 発表の流れ

## 1. 準備

1. 李・筒井形式の紹介
2. 位置と運動量についての結果

## 2. 時間について進行中の結果

1. コンセプト
2. 点測定器
3. ガウス波束測定器

## 3. まとめ・展望

**点測定器**  $M_x$       測定結果の空間 :  $\Omega = \{\mathbb{R}, \text{ND}\}$

$\gamma$ : 測定器の詳細に依存する結合定数       $[\gamma] = -(d-1)$

時刻  $t$  に粒子が検出される事象に対応する **POVM 密度** :

$$\widehat{\Pi}_x(t) = \gamma |\vec{x}\rangle\langle\vec{x}| \quad [\widehat{\Pi}_x(t)] = 1$$

区間  $\mathcal{J} = [T_i, T_f]$  内の時刻に粒子が検出される事象に対応する **POVM 要素**

$$\widehat{E}(\mathcal{J}) := \int_{\mathcal{J}} dt \widehat{\Pi}_x(t) \quad [\widehat{E}(\mathcal{J})] = 0$$

検出されない事象 = ND に対応する **POVM 要素** :

$$\widehat{\Pi}_x(\text{ND}) = \widehat{1} - \int_{\mathbb{R}} dt \widehat{\Pi}_x(t) \quad [\widehat{\Pi}_x(\text{ND})] = 0$$

# 許容部分空間

$$\mathcal{H}_{\text{adm}} := \text{Ran} \hat{P}^{\hat{E}(J)}([0,1])$$

$\mathcal{H}_{\text{adm}}$  は次の条件が成り立つ制限部分空間 :

$$\hat{E}(J) \leq \hat{1}$$

これは確率解釈が成り立つような Hilbert 空間  
で考えるという条件

状態  $\hat{\rho}$  についての全検出確率（規格化因子）：

$$p_D[\hat{\rho}] := \text{Tr} \left[ \hat{\rho} \int_{\mathbb{R}} dt \widehat{\Pi}_x(t) \right] = \int_{\mathbb{R}} dt [M_x \hat{\rho}](t)$$

検出時間の条件付き期待値：

$$\frac{\text{Tr} \left[ \hat{\rho} \int_{\mathbb{R}} dt t \widehat{\Pi}_x(t) \right]}{p_D[\hat{\rho}]} = \frac{\int_{\mathbb{R}}^{p_D} dt t [M_x \hat{\rho}](t)}{\int_{\mathbb{R}} dt [M_x \hat{\rho}](t)} = \frac{\langle \text{id}_{\mathbb{R}} \rangle_{M_x \hat{\rho}}}{\langle \chi_{\mathbb{R}} \rangle_{M_x \hat{\rho}}}$$

$$\chi_{\mathbb{R}}(t) = 1, \chi_{\mathbb{R}}(ND) = 0$$

$$\text{id}_{\mathbb{R}}(t) = t, \text{id}_{\mathbb{R}}(ND) = 0$$

# 点測定器についての引き戻し時間作用素

$$\hat{T}_x = \widehat{M_x^* \text{id}_{\mathbb{R}}}$$

$$\hat{I}_x = \widehat{M_x^* \chi_{\mathbb{R}}}$$

$$\langle \mathbf{p} | \hat{T}_x | \mathbf{p}' \rangle = \lambda \int_{\mathbb{R}} dt t \exp \left[ -i \left( \frac{P'^2}{2m} - \frac{P^2}{2m} \right) + i(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x} \right]$$

$$\langle \mathbf{p} | \hat{I}_x | \mathbf{p}' \rangle = \lambda \int_{\mathbb{R}} dt \exp \left[ -i \left( \frac{P'^2}{2m} - \frac{P^2}{2m} \right) + i(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x} \right]$$

古典的観測量  $\text{id}_{\mathbb{R}}$  を、測定  $M_x$  を介して量子側へ引き戻すことで演算子として定義した

# 時間作用素の条件付き期待値

粒子がまっすぐ検出器に向かってくるという条件

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}_S \propto \boldsymbol{P}_S, (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}_S) \cdot \boldsymbol{P}_S > 0$$

の下で

$$\frac{\langle \hat{T}_x \rangle_{\hat{\rho}}}{\langle \hat{I}_x \rangle_{\hat{\rho}}} \simeq T_S + m \frac{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}_S|}{|\boldsymbol{P}_S|}$$

$\hat{T}_x$  が確かに時間に対応する演算子であることを示唆

# 発表の流れ

## 1. 準備

1. 李・筒井形式の紹介
2. 位置と運動量についての結果

## 2. 時間について進行中の結果

1. コンセプト
2. 点測定器
3. ガウス波束測定器

## 3. まとめ・展望

# ガウス波束測定器 $M_{X_D, \sigma_D}$

測定結果の空間：

$$\Omega = \{\mathbb{R}, \text{ND}\}$$

$\gamma$ : 測定器の詳細に依存する結合定数  $[\gamma] = -(d-1)$

時刻  $T_D$  に粒子が検出される場合に対応する **POVM 密度**：

$$\widehat{\Pi}_{X_D, \sigma_D}(T_D) = \gamma \int_{\mathbb{R}^d} d^d \mathbf{P} \frac{|\overrightarrow{X_D}, \mathbf{P}; \sigma_D\rangle \langle \overrightarrow{X_D}, \mathbf{P}; \sigma_D|}{(2\pi)^d} \quad [\widehat{\Pi}_{X_D, \sigma_D}(T_D)] = 1$$

検出されない場合=ND に対応する **POVM 要素**：

$$\widehat{\Pi}_{X_D, \sigma_D}(\text{ND}) = \hat{1} - \int_{\mathbb{R}} dT_D \widehat{\Pi}_{X_D, \sigma_D}(T_D)$$

# ガウス波束測定器についての引き戻し時間作用素

$$\widehat{T_{X_D, \sigma_D}} = M_{X_D, \sigma_D}^* \widehat{\text{id}_{\mathbb{R}}}$$

$$\widehat{I_{X_D, \sigma_D}} = M_{X_D, \sigma_D}^* \widehat{\chi_{\mathbb{R}}}$$

$$\langle \mathbf{p} | \widehat{T_{X_D, \sigma_D}} | \mathbf{p}' \rangle$$

$$= \frac{\gamma}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dT T \exp \left[ -i \left( \frac{P'^2}{2m} - \frac{P^2}{2m} \right) + i(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{X}_D - \frac{\sigma_D}{4} (\mathbf{p}' - \mathbf{p})^2 \right]$$

$$\langle \mathbf{p} | \widehat{I_{X_D, \sigma_D}} | \mathbf{p}' \rangle$$

$$= \frac{\gamma}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} dT \exp \left[ -i \left( \frac{P'^2}{2m} - \frac{P^2}{2m} \right) + i(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{X}_D - \frac{\sigma_D}{4} (\mathbf{p}' - \mathbf{p})^2 \right]$$

$$[\widehat{T_{X_D, \sigma_D}}] = -1$$

$$[\widehat{I_{X_D, \sigma_D}}] = 0$$

# 時間作用素の条件付き期待値

粒子がまっすぐ検出器に向かってくるという条件

$$X_D - X_S \propto P_S, (X_D - X_S) \cdot P_S > 0$$

の下で

$$\frac{\langle \widehat{T_{X_D, \sigma_D}} \rangle_{\hat{\rho}}}{\langle \widehat{I_{X_D, \sigma_D}} \rangle_{\hat{\rho}}} \simeq T_S + m \frac{|X_D - X_S|}{|P_S|}$$

$\widehat{T_{X_D, \sigma_D}}$  が確かに時間に対応する演算子であることを示唆

# 自由ハミルトニアンと引き戻し時間作用素との交換関係

正準交換関係（CCR）に似た綺麗な形になった

$$\left[ \widehat{T_{X_D, \sigma_D}}, \widehat{H_{\text{free}}} \right] = -i \widehat{I_{X_D, \sigma_D}}$$

$$\left[ \widehat{I_{X_D, \sigma_D}}^{-1/2} \widehat{T_{X_D, \sigma_D}} \widehat{I_{X_D, \sigma_D}}^{-1/2}, \widehat{H_{\text{free}}} \right] = -i \widehat{1}$$

$$\left[ \widehat{I_{X_D, \sigma_D}}, \widehat{H_{\text{free}}} \right] = 0$$

ガウス波束基底の非直交性より

$$\left[ \widehat{T_{X_D, \sigma_D}}, \widehat{I_{X_D, \sigma_D}} \right] = 0(\gamma^2) \neq 0$$

# 自由ハミルトニアンの部分逆は無い

$$\text{Tr}[\widehat{H}_{\text{free}} \widehat{\rho}_S] = \int dT_D [M \widehat{\rho}_S](T_D) M_{\widehat{\rho}_S}^{*-1} \widehat{H}_{\text{free}}(T_D)$$

フーリエ変換を行うと

$$\widetilde{f}_H(\omega) = \frac{(2\pi)^d}{\sqrt{2\pi\gamma}} E(\mathbf{p}) e^{-i(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \cdot X_D + \frac{\sigma_D}{4} (\mathbf{p}' - \mathbf{p})^2} \quad \omega = E(\mathbf{p}) - E(\mathbf{p}')$$

これは解無しなので

$$\widehat{H}_{\text{free}} \notin \text{ran } M_{X_D, \sigma_D}^*$$

考えている測定についての李の誤差は無限大

$$\tilde{\varepsilon}_{\widehat{\rho}_S} [\widehat{H}_{\text{free}} ; M_{X_D, \sigma_D}] = \infty$$

# 発表の流れ

## 1. 準備

1. 李・筒井形式の紹介
2. 位置と運動量についての結果

## 2. 時間について進行中の結果

1. コンセプト
2. 点測定器
3. ガウス波束測定器

## 3. まとめ・展望

# まとめ

- ハイゼンベルクの当初の理念は**測定誤差と擾乱**
- 量子力学で時間は**パラメータ**だった/**対称作用素**
- **李・筒井形式**では**量子測定が古典物理量から量子物理量を誘導する**
- 位置と運動量の不確定性関係（李・筒井/李）
- 時間並進したガウス波束基底
- 点測定器/ガウス波束測定器
- **引き戻し時間演算子**
- **CCR に似た交換関係**
- 自由ハミルトニアンの部分逆は無い

# 今後の展望

- **Bell-CHSH 不等式**
- **角度と軌道角運動量演算子、位相演算子および QCD アクシオン**
- **ローレンツ不変/共変なガウス波束基底に適用し、同様のアプローチを相対論的に拡張**

# Thank you!



↑  
**PTEP(2025),063A02**  
のQRコード

バックアップ

# ケナードの不等式 (1927)

位置と運動量の測定値の内在的なゆらぎに関する不確定性関係

$$\sigma[\hat{x}]\sigma[\hat{p}_x] \geq \frac{\hbar}{2}$$

ガウス波束：

$$\sigma[\hat{x}]\sigma[\hat{p}_x] = \frac{\hbar}{2}$$

等号を達成

ロバートソンが一般の自己共役作用素について拡張

# 小澤の不等式 (2003)

$$\varepsilon^0[\hat{A}]\varepsilon^0[\hat{B}] + \varepsilon^0[\hat{A}]\sigma[\hat{B}] + \sigma[\hat{A}]\varepsilon^0[\hat{B}] \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|$$

小澤の誤差  $\varepsilon^0[\hat{A}] := \sqrt{\langle (\hat{\mathbb{A}} - \hat{A} \otimes \hat{\mathbb{1}})^2 \rangle}$   $\hat{\mathbb{A}}$  : 測定器の  
メーターに相  
当する量

- 重力波検出で標準量子限界を超える可能性を指摘
- 測定誤差と擾乱についても同様に成り立つ
- $\hat{\mathbb{A}} - \hat{A} \otimes \hat{\mathbb{1}}$  という演算子の和の操作的意味が不明確

小澤の定式化では位置の測定誤差と運動量が受ける擾乱の積は 0 になりうる

$$\varepsilon^0[\hat{x}]\eta^0[\hat{p}_x] \geq 0$$

von Neumann のモデル:

$$\varepsilon^0[\hat{x}]\eta^0[\hat{p}_x] \geq \frac{\hbar}{2}$$

収縮状態測定モデル:

$$\varepsilon^0[\hat{x}]\eta^0[\hat{p}_x] = 0$$

Ozawa (1988, 2002)

von Neumann のモデル:

$$\hat{U} = \exp(-i\hbar\hat{x}\hat{p}_y)$$

$$\varepsilon^0[\hat{x}]\eta^0[\hat{p}_x] \geq \frac{\hbar}{2}$$

収縮状態測定モデル:

$$\hat{U} = \exp\left(-i\frac{K\pi}{3\sqrt{3}\hbar}\{2(\hat{x}\hat{p}_y - \hat{p}_x\hat{y}) + (\hat{x}\hat{p}_x - \hat{y}\hat{p}_y)\}\right)$$

相互作用時間とパラメータ  $K$  を適切に選ぶと

$$\varepsilon^0[\hat{x}]\eta^0[\hat{p}_x] = 0$$

# 時間とエネルギーの不確定性関係

$$\Delta E \Delta t \gtrsim h$$

時間は自己共役演算子ではない（cf）**Pauli の定理**）ので、さまざまな議論の対象となってきた（ロバートソン型の不等式ではない？）

詳しく知りたい方は谷村省吾「時間とエネルギーの不確定性関係—腑に落ちない関係」素粒子論研究電子版Vol. 16 (2014) No. 3 を参照

# Aharonov-Bohm の時間作用素 (非相対論的)

時間に対応する演算子を構成する試みは過去にあった

$$\widehat{T}_{AB} = -\frac{m}{2} \left( \widehat{p}_x^{-1} \widehat{x} + \widehat{x} \widehat{p}_x^{-1} \right)$$

$$\left[ \widehat{T}_{AB}, \widehat{H}_{\text{free}} \right] = i\hbar$$

※  $\widehat{T}_{AB}$  は対称作用素であって、自己共役作用素でないとされている (参考: パウリの定理)

※  $\widehat{T}_{AB}$  の物理的意味は「到着時刻」とであると解釈されている

李・筒井の随伴 (引き戻し)  $\widehat{M}^* f$

$$\langle \widehat{M}^* f \rangle_{\hat{\rho}} = \langle f \rangle_{M\hat{\rho}}$$

押し出し  $M_* \hat{A}$

$$\langle \hat{A}, \widehat{M}^* f \rangle_{\hat{\rho}} = \langle M_* \hat{A}, f \rangle_{M\hat{\rho}}$$

李・筒井の誤差

$$\varepsilon_{\hat{\rho}}[\hat{A}; M] := \sqrt{\|\hat{A}\|_{\hat{\rho}}^2 - \|M_* \hat{A}\|_{M\hat{\rho}}^2}$$

測定前

測定後

李の誤差

$$\tilde{\varepsilon}_{\hat{\rho}}[\hat{A}; M] := \sqrt{\|M^{*-1} \hat{A}\|_{M\hat{\rho}}^2 - \|\hat{A}\|_{\hat{\rho}}^2}$$

測定後

測定前

$$\tilde{\varepsilon}_{\hat{\rho}}[\hat{A}; M] \geq \varepsilon_{\hat{\rho}}[\hat{A}; M]$$

操作的意味が明確

## 李・筒井の不等式

$$\varepsilon[\hat{A}]\varepsilon[\hat{B}] \geq \sqrt{\mathcal{J}_{\hat{\rho}}^2[\hat{A}, \hat{B}] + \mathcal{R}_{\hat{\rho}}^2[\hat{A}, \hat{B}]}$$

## 李の不等式

$$\tilde{\varepsilon}[\hat{A}]\tilde{\varepsilon}[\hat{B}] \geq \sqrt{\mathcal{J}_{0\hat{\rho}}^2[\hat{A}, \hat{B}] + \tilde{\mathcal{R}}_{\hat{\rho}}^2[\hat{A}, \hat{B}]}$$

李・筒井/李の不等式は Cauchy-Schwarz 不等式

誤差・擾乱関係も全く同様

# 李・筒井/李の不等式の導出

$$\hat{A}, \hat{B} \in S(\mathcal{H}) \quad f, g \in R(\Omega)$$

$S(\mathcal{H}) \times R(\Omega)$  上の半内積 :

$$\langle (\hat{A}, f), (\hat{B}, g) \rangle := \langle \hat{A}\hat{B} \rangle_{\hat{\rho}} + \langle fg \rangle_{M\hat{\rho}} - \langle \widehat{M}^* f \widehat{M}^* g \rangle_{\hat{\rho}}$$

$S(\mathcal{H}) \times R(\Omega)$  上の半ノルム :

$$\|(\hat{A}, f)\| := \sqrt{\langle (\hat{A}, f), (\hat{A}, f) \rangle}$$

対応する Cauchy-Schwarz の不等式:

$$\|(\hat{A}, f)\| \|(\hat{B}, g)\| \geq |\langle (\hat{A}, f), (\hat{B}, g) \rangle|$$

$$\text{李・筒井} : \hat{A} \rightarrow \hat{A} - M^* M_* \hat{A}, \quad f \rightarrow M_* \hat{A}$$

$$\text{李} : \hat{A} \rightarrow \hat{A} - M^* M^{*-1} \hat{A}, \quad f \rightarrow M^{*-1} \hat{A}$$

李・筒井の不等式は**小澤の不等式**を含んでいる

$$\begin{aligned}\epsilon_{\hat{\rho}}^{\text{O}}[\hat{A}] \epsilon_{\hat{\rho}}^{\text{O}}[\hat{B}] &\geq \epsilon_{\hat{\rho}}[\hat{A}] \epsilon_{\hat{\rho}}[\hat{B}] \stackrel{\text{LT}}{\geq} \sqrt{\mathcal{I}_{\hat{\rho}}^2[\hat{A}, \hat{B}] + \mathcal{R}_{\hat{\rho}}^2[\hat{A}, \hat{B}]} \\ &\geq |\mathcal{I}_{\hat{\rho}}[\hat{A}, \hat{B}]| \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle_{\hat{\rho}} \right| - \epsilon_{\hat{\rho}}^{\text{O}}[\hat{A}] \sigma_{\hat{\rho}}[\hat{B}] - \sigma_{\hat{\rho}}[\hat{A}] \epsilon_{\hat{\rho}}^{\text{O}}[\hat{B}]\end{aligned}$$

他にも

**ケナード・ロバートソンの不等式**も含む。

**渡辺・沙川・上田の不等式**も含むという議論も

(野神さんセミナー)

# モデル

- 入射状態は純粋なガウス波束基底状態：

$$\hat{\rho}_{\text{in}} := |X_{\text{in}}, P_{\text{in}}; \sigma_{\text{in}}\rangle\langle X_{\text{in}}, P_{\text{in}}; \sigma_{\text{in}}|$$

- 別のガウス波束基底による位置と運動量の同時測定  $M$
- 李・筒井の不等式と李の不等式を計算

# 不確定性関係の大雑把な歴史

- **ハイゼンベルクの不等式**：ガンマ線顕微鏡の思考実験；電子の**位置の測定誤差と運動量**が**受ける擾乱**
- **ケナード・ロバートソンの不等式**：測定と無関係な**内在的揺らぎ**について（標準的）
- **小澤の不等式**：内在的揺らぎに加えて測定誤差（と擾乱）を合わせた不等式；測定誤差の**操作的意味が不明確**
- **李・筒井形式**：近年、李と筒井が提案；以上のような不確定性関係を含む = 「**普遍的**」；「**誤差の操作的意味が明確**」（後で解説）

# パウリの定理

下に有界なハミルトニアン  $\hat{H}$  と正準交換関係をみたす自己共役作用素  $\hat{T}$  は存在しない

# 物理量と状態

	物理量	状態
古典	実関数 $f(\omega) \in R(\Omega)$	確率密度関数 $p(\omega) \in W(\Omega)$
量子	自己共役演算子 $\hat{A} \in S(\mathcal{H})$	密度演算子 $\hat{\rho} \in Z(\mathcal{H})$

**物理量空間:** すべての物理量から成る集合  $(R(\Omega), S(\mathcal{H}))$

**状態空間:** すべての状態から成る集合  $(W(\Omega), Z(\mathcal{H}))$

# 半ノルムと半内積

	期待値	半ノルム	半内積
古典	$\langle f \rangle_p := \int_{\Omega} d\omega f(\omega) p(\omega)$	$\ f\ _p^2 := \langle f^2 \rangle_p$	$\langle f, g \rangle_p := \langle fg \rangle_p$
量子	$\langle \hat{A} \rangle_{\hat{\rho}} := \text{Tr}[\hat{A}\hat{\rho}]$	$\ \hat{A}\ _{\hat{\rho}}^2 := \langle \hat{A}^2 \rangle_{\hat{\rho}}$	$\langle \hat{A}, \hat{B} \rangle_{\hat{\rho}} := \left\langle \frac{\{\hat{A}, \hat{B}\}}{2} \right\rangle_{\hat{\rho}}$

# 押し出し

測定  $M$ , 量子物理量  $\hat{A}$ , 与えられた量子状態  $\hat{\rho}$  についての押し出し  $M_\star \hat{A}$  を定める  $\widehat{M}^\star f$  を用いた双対関係 :

$$\langle \hat{A}, \widehat{M}^\star f \rangle_{\hat{\rho}} = \langle M_\star \hat{A}, f \rangle_{M\hat{\rho}}$$

$$\langle \hat{A}, \hat{B} \rangle_{\hat{\rho}} := \left\langle \frac{\{\hat{A}, \hat{B}\}}{2} \right\rangle_{\hat{\rho}}$$

$$\langle f, g \rangle_p := \int_{\Omega} d\omega f(\omega)g(\omega)p(\omega)$$

# 李・筒井の誤差

$$\varepsilon_{\hat{\rho}}[\hat{A}; M] := \sqrt{\|\hat{A}\|_{\hat{\rho}}^2 - \|M_{\star}\hat{A}\|_{M\hat{\rho}}^2}$$

測定前 測定後

$$\|\hat{A}\|_{\hat{\rho}}^2 := \langle \hat{A}^2 \rangle_{\hat{\rho}}$$

$$\|f\|_p^2 := \int_{\Omega} d\omega f^2(\omega)p(\omega)$$

李・筒井の誤差は操作的意味が明確

# 李・筒井の不等式

状態  $\hat{\rho}$  と測定  $M$  について、

$$\varepsilon[\hat{A}]\varepsilon[\hat{B}] \geq \sqrt{J_{\hat{\rho}}^2[\hat{A}, \hat{B}] + \mathcal{R}_{\hat{\rho}}^2[\hat{A}, \hat{B}]}$$

$$J_{\hat{\rho}}[\hat{A}, \hat{B}] := \left\langle \frac{[\hat{A}, \hat{B}]}{2i} \right\rangle_{\hat{\rho}} - \left\langle \frac{[\widehat{M^* M_*} \hat{A}, \hat{B}]}{2i} \right\rangle_{\hat{\rho}} - \left\langle \frac{[\hat{A}, \widehat{M^* M_*} \hat{B}]}{2i} \right\rangle_{\hat{\rho}} \quad \text{純量子項}$$

$$\mathcal{R}_{\hat{\rho}}[\hat{A}, \hat{B}] := \left\langle \frac{\{\hat{A}, \hat{B}\}}{2} \right\rangle_{\hat{\rho}} - \langle M_* \hat{A}, M_* \hat{B} \rangle_{M\hat{\rho}} \quad \text{半古典項}$$

李・筒井の不等式は Cauchy-Schwarz 不等式

# 李・筒井と小澤の誤差の関係

- 小澤の誤差は李・筒井の誤差より小さくない： $\varepsilon_{\hat{\rho}}^0[\hat{x}] \geq \varepsilon_{\hat{\rho}}[\hat{x}]$ 
  - $\hat{X}$  の半ノルムは  $M^{*-1}$  の下で不変： $\|\hat{X}\|_{\hat{\rho}} = \|M^{*-1}\hat{X}\|_{M\hat{\rho}}$
- $|\mathcal{J}_{\hat{\rho}}[\hat{x}, \hat{p}]| \geq \left| \left\langle \frac{[\hat{x}, \hat{p}]}{2i} \right\rangle_{\hat{\rho}} \right| - \sigma_{\hat{\rho}}[\hat{x} - \widehat{M^*M_*}\hat{x}] \sigma_{\hat{\rho}}[\hat{p}] - \sigma_{\hat{\rho}}[\hat{x}] \sigma_{\hat{\rho}}[\hat{p} - \widehat{M^*M_*}\hat{p}]$
- $\sigma_{\hat{\rho}}[\hat{A} - \widehat{M^*M_*}\hat{A}] \leq \varepsilon_{\hat{\rho}}[\hat{A}]$

李・筒井の不等式は小澤の不等式を含んでいる (普遍的)

$$\begin{aligned}\epsilon_{\hat{\rho}}^{\text{O}}[\hat{A}] \epsilon_{\hat{\rho}}^{\text{O}}[\hat{B}] &\geq \epsilon_{\hat{\rho}}[\hat{A}] \epsilon_{\hat{\rho}}[\hat{B}] \stackrel{\text{LT}}{\geq} \sqrt{\mathcal{I}_{\hat{\rho}}^2[\hat{A}, \hat{B}] + \mathcal{R}_{\hat{\rho}}^2[\hat{A}, \hat{B}]} \\ &\geq |\mathcal{I}_{\hat{\rho}}[\hat{A}, \hat{B}]| \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle_{\hat{\rho}} \right| - \epsilon_{\hat{\rho}}^{\text{O}}[\hat{A}] \sigma_{\hat{\rho}}[\hat{B}] - \sigma_{\hat{\rho}}[\hat{A}] \epsilon_{\hat{\rho}}^{\text{O}}[\hat{B}]\end{aligned}$$

他にも

**ケナード・ロバートソンの不等式、**

**渡辺・沙川・上田の不等式**

なども含むとされている

# 李の誤差

$$\|f\|_p^2 := \int_{\Omega} d\omega f^2(\omega) p(\omega)$$

$$\|\hat{A}\|_{\hat{\rho}}^2 := \langle \hat{A}^2 \rangle_{\hat{\rho}}$$

$$\varepsilon_{\hat{\rho}}[\hat{A}; M] := \sqrt{\|M^{*-1}\hat{A}\|_{M\hat{\rho}}^2 - \|\hat{A}\|_{\hat{\rho}}^2}$$

測定後 測定前

where

引き戻しの（標準部分）逆写像：

$$M^{*-1}\hat{A} := (M^*)^{-1}\hat{A}$$

李の誤差は操作的意味が明確

# 李の不等式

状態  $\hat{\rho}$  と測定  $M$  について、

$$\tilde{\varepsilon}[\hat{A}] \tilde{\varepsilon}[\hat{B}] \geq \sqrt{\mathcal{J}_{0\hat{\rho}}^2[\hat{A}, \hat{B}] + \tilde{\mathcal{R}}_{\hat{\rho}}^2[\hat{A}, \hat{B}]}$$

$$\mathcal{J}_{0\hat{\rho}}[\hat{A}, \hat{B}] := \left\langle \frac{[\hat{A}, \hat{B}]}{2i} \right\rangle_{\hat{\rho}} \quad \text{純量子項}$$

$$\tilde{\mathcal{R}}_{\hat{\rho}}[\hat{A}, \hat{B}] := \left\langle \frac{\{\hat{A}, \hat{B}\}}{2} \right\rangle_{\hat{\rho}} - \langle M^{*-1} \hat{A}, M^{*-1} \hat{B} \rangle_{M\hat{\rho}} \quad \text{半古典項}$$

李の不等式は Cauchy-Schwarz不等式

李：Arthurs-Kelly-Goodman の不等式を含むと主張

李・筒井/李の不等式は誤差・擾乱関係も全く同様

$$\varepsilon[\hat{A}]\eta[\hat{B}] \geq \sqrt{J_{\hat{\rho}}^2[\hat{A}, \hat{B}] + \mathcal{R}_{\hat{\rho}}^2[\hat{A}, \hat{B}]}$$

$$\tilde{\varepsilon}[\hat{A}]\tilde{\eta}[\hat{B}] \geq \sqrt{J_{0\hat{\rho}}^2[\hat{A}, \hat{B}] + \tilde{\mathcal{R}}_{\hat{\rho}}^2[\hat{A}, \hat{B}]}$$

# 位置でも運動量でもガウス分布

遷移確率

$$|\langle X, P; \sigma | X', P'; \sigma \rangle|^2$$

運動量について先に積分： 幅  $\sim \sqrt{\sigma}$  で  $X'$  周りに局在

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(X - X')^2}{2\sigma}\right)$$

位置について先に積分： 幅  $\sim \sqrt{1/\sigma}$  で  $P'$  周りに局在

$$\sqrt{\frac{\sigma}{2\pi}} \exp\left(-\frac{\sigma}{2}(P - P')^2\right)$$

ガウス波束基底  $\{|X, P; \sigma\rangle\}$  の運動量表示 :

$$\langle p|X, P; \sigma\rangle := \left(\frac{\sigma}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-ipX - \frac{\sigma}{2}(p - P)^2\right)$$

完全性関係 :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{dXdP}{2\pi} |X, P; \sigma\rangle\langle X, P; \sigma| = \hat{1}$$

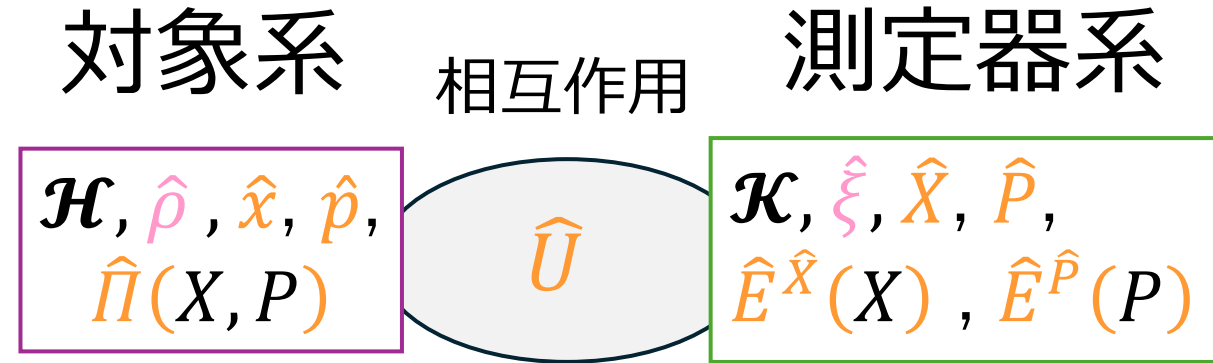
# 異なるガウス波束基底同士は非直交

$$\begin{aligned} &\langle X, P; \sigma | X', P'; \sigma \rangle \\ &= \exp \left( i \frac{P + P'}{2} (X - X') - \frac{(X - X')^2}{4\sigma} - \frac{\sigma}{4} (P - P')^2 \right) \end{aligned}$$

平面波と異なり規格化可能なので Hilbert 空間の元になっている

ガウス波束基底による測定は射影測定にはならないが、次で見るように **Positive Operator Valued Measure (POVM) 測定** になっている

# 小澤の不等式のレビュー



メーター物理量

$$[\hat{X}, \hat{P}] = 0, \hat{X}|X, P\rangle = X|X, P\rangle, \hat{P}|X, P\rangle = P|X, P\rangle$$

射影作用素：  $\hat{E}^{\hat{X}}(X), \hat{E}^{\hat{P}}(P)$

小澤の主張：任意の POVM  $\hat{\Pi}(X, P)$  について、  
次を実現する5つ組  $(\mathcal{K}, \hat{\xi}, \hat{U}, \hat{X}, \hat{P})$  が存在する：

$$\hat{\Pi}(X, P) = \text{Tr}_{\mathcal{K}} \left\{ \hat{U}^\dagger \left( \hat{\mathbb{1}} \otimes |X, P\rangle \langle X, P| \right) \hat{U} \left( \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{\xi} \right) \right\}$$

メーターに対応する量：

$$\hat{X} := \hat{U}^\dagger \left( \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{X} \right) \hat{U} \quad \hat{P} := \hat{U}^\dagger \left( \hat{\mathbb{1}} \otimes \hat{P} \right) \hat{U}$$

誤差演算子の定義：

$$\hat{N}_{\hat{q}} := \hat{\mathbb{Q}} - \hat{q} \otimes \hat{\mathbb{1}} \quad \hat{\mathbb{Q}} = \hat{\mathbb{X}} \text{ or } \hat{\mathbb{P}}, \hat{q} = \hat{x} \text{ or } \hat{p}$$

小澤の誤差の定義：

$$\epsilon_{\hat{\rho}}^{\text{O}}[\hat{q}] := \left\| \hat{N}_{\hat{q}} \right\|_{\hat{\rho} \otimes \hat{\xi}} = \sqrt{\text{Tr} \left[ \hat{N}_{\hat{q}}^2 \left( \hat{\rho} \otimes \hat{\xi} \right) \right]}$$

$$[\hat{X}, \hat{P}] = 0 \rightarrow 0 = [\hat{N}_{\hat{x}}, \hat{N}_{\hat{p}}] + [\hat{N}_{\hat{x}}, \hat{p} \otimes \hat{1}] + [\hat{x} \otimes \hat{1}, \hat{N}_{\hat{p}}] + [\hat{x}, \hat{p}] \otimes \hat{1}.$$

いくらか計算すると小澤の不等式が得られる：

$$\epsilon_{\hat{\rho}}^O[\hat{x}] \epsilon_{\hat{\rho}}^O[\hat{p}] + \epsilon_{\hat{\rho}}^O[\hat{x}] \sigma_{\hat{\rho}}[\hat{p}] + \sigma_{\hat{\rho}}[\hat{x}] \epsilon_{\hat{\rho}}^O[\hat{p}] \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{x}, \hat{p}] \rangle_{\hat{\rho}} \right|$$

# 李・筒井の誤差と不等式

# 不等式の計算のために必要な量を計算していく

※見せるだけ追わないでよい

$$\left\langle \frac{[\hat{x}, \hat{p}]}{2i} \right\rangle_{\hat{\rho}_{\text{in}}} = \frac{1}{2}$$
$$\left\langle \frac{\{\hat{x}, \hat{p}\}}{2} \right\rangle_{\hat{\rho}_{\text{in}}} = X_{\text{in}} P_{\text{in}}$$

$$\|\hat{x}\|_{\hat{\rho}_{\text{in}}}^2 = X_{\text{in}}^2 + \frac{\sigma_{\text{in}}}{2}$$

$$\|\hat{p}\|_{\hat{\rho}_{\text{in}}}^2 = P_{\text{in}}^2 + \frac{1}{2\sigma_{\text{in}}}$$

# 押し出し

※見せるだけ追わないでよい

$$\sigma_{\text{red}} := \frac{\sigma \sigma_{\text{in}}}{\sigma + \sigma_{\text{in}}}$$

$$[M_{\star} \hat{x}](X, P) = \bar{X} := \sigma_{\text{red}} \left( \frac{X}{\sigma} + \frac{X_{\text{in}}}{\sigma_{\text{in}}} \right)$$

$X$  と  $X_{\text{in}}$  を  $\sigma_{\text{in}}$  と  $\sigma$  でそれぞれ重みづけして平均化したもの

$$[M_{\star} \hat{p}](X, P) = \bar{P} := \frac{\sigma P + \sigma_{\text{in}} P_{\text{in}}}{\sigma + \sigma_{\text{in}}}$$

$P$  と  $P_{\text{in}}$  を  $\sigma$  と  $\sigma_{\text{in}}$  でそれぞれ重みづけして平均化したもの

$$\|M_{\star} \hat{x}\|_{M \hat{p}_{\text{in}}}^2 = X_{\text{in}}^2 + \frac{\sigma_{\text{in}}^2}{2\sigma_{\text{sum}}}$$

$$\sigma_{\text{sum}} := \sigma + \sigma_{\text{in}}$$

$$\|M_{\star} \hat{p}\|_{M \hat{p}_{\text{in}}}^2 = P_{\text{in}}^2 + \frac{\sigma}{2\sigma_{\text{in}}\sigma_{\text{sum}}}$$

$$\langle M_{\star} \hat{x}, M_{\star} \hat{p} \rangle_{M \hat{p}_{\text{in}}} = X_{\text{in}} P_{\text{in}}$$

# 李・筒井の誤差

※見せるだけ追わないでよい

$$\varepsilon_{\hat{\rho}_{\text{in}}}[\hat{x}; M] := \sqrt{\|\hat{x}\|_{\hat{\rho}_{\text{in}}}^2 - \|M_{\star}\hat{x}\|_{M\hat{\rho}_{\text{in}}}^2}$$

$$\|\hat{x}\|_{\hat{\rho}_{\text{in}}}^2 = X_{\text{in}}^2 + \frac{\sigma_{\text{in}}}{2}$$

$$\|M_{\star}\hat{x}\|_{M\hat{\rho}_{\text{in}}}^2 = X_{\text{in}}^2 + \frac{\sigma_{\text{in}}^2}{2\sigma_{\text{sum}}}$$

$$\|\hat{p}\|_{\hat{\rho}_{\text{in}}}^2 = P_{\text{in}}^2 + \frac{1}{2\sigma_{\text{in}}}$$

$$\|M_{\star}\hat{p}\|_{M\hat{\rho}_{\text{in}}}^2 = P_{\text{in}}^2 + \frac{\sigma}{2\sigma_{\text{in}}\sigma_{\text{sum}}}$$

$$\varepsilon^2[\hat{x}] = \frac{\sigma_{\text{red}}}{2},$$

$$\varepsilon^2[\hat{p}] = \frac{1}{2\sigma_{\text{sum}}}$$

$$\therefore \varepsilon[\hat{x}]\varepsilon[\hat{p}] = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma_{\text{red}}}{\sigma_{\text{sum}}}}$$

# 押し出しの引き戻し

※見せるだけ追わないでよい

$$\widehat{M^* M}_* \hat{x} = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{dx dP}{2\pi} \bar{X} |X, P; \sigma\rangle \langle X, P; \sigma|$$

$$\bar{X} := \sigma_{\text{red}} \left( \frac{X}{\sigma} + \frac{X_{\text{in}}}{\sigma_{\text{in}}} \right)$$

$$\widehat{M^* M}_* \hat{p} = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{dx dP}{2\pi} \bar{P} |X, P; \sigma\rangle \langle X, P; \sigma|$$

$$\bar{P} := \frac{\sigma P + \sigma_{\text{in}} P_{\text{in}}}{\sigma + \sigma_{\text{in}}}$$

# 不等式の右辺の量

※見せるだけ追わないでよい

$$\left\langle \frac{[\widehat{M^* M_*} \hat{x}, \hat{p}]}{2i} \right\rangle_{\hat{\rho}_{\text{in}}} = \frac{\sigma_{\text{in}}}{2\sigma_{\text{sum}}} \left\langle \frac{[\hat{x}, \widehat{M^* M_*} \hat{p}]}{2i} \right\rangle_{\hat{\rho}_{\text{in}}} = \frac{\sigma}{2\sigma_{\text{sum}}}$$

$$\mathcal{J}_{\hat{\rho}_{\text{in}}}[\hat{x}, \hat{p}] := \left\langle \frac{[\hat{x}, \hat{p}]}{2i} \right\rangle_{\hat{\rho}_{\text{in}}} - \left\langle \frac{[\widehat{M^* M_*} \hat{x}, \hat{p}]}{2i} \right\rangle_{\hat{\rho}_{\text{in}}} - \left\langle \frac{[\hat{x}, \widehat{M^* M_*} \hat{p}]}{2i} \right\rangle_{\hat{\rho}_{\text{in}}}$$

$$\mathcal{R}_{\hat{\rho}_{\text{in}}}[\hat{x}, \hat{p}] := \left\langle \frac{\{\hat{x}, \hat{p}\}}{2} \right\rangle_{\hat{\rho}_{\text{in}}} - \langle M_* \hat{x}, M_* \hat{p} \rangle_{M \hat{\rho}_{\text{in}}}$$

$$\left\langle \frac{\{\hat{x}, \hat{p}\}}{2} \right\rangle_{\hat{\rho}_{\text{in}}} = X_{\text{in}} P_{\text{in}} \quad \left\langle \frac{[\hat{x}, \hat{p}]}{2i} \right\rangle_{\hat{\rho}_{\text{in}}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \mathcal{J}_{\hat{\rho}_{\text{in}}}[\hat{x}, \hat{p}] = 0, \mathcal{R}_{\hat{\rho}_{\text{in}}}[\hat{x}, \hat{p}] = 0 \quad \langle M_* \hat{x}, M_* \hat{p} \rangle_{M \hat{\rho}_{\text{in}}} = X_{\text{in}} P_{\text{in}}$$

# 李・筒井の不等式

$$\sigma_{\text{sum}} := \sigma + \sigma_{\text{in}}$$

$$\sigma_{\text{red}} := \frac{\sigma \sigma_{\text{in}}}{\sigma + \sigma_{\text{in}}}$$

$$(\varepsilon[\hat{x}] \varepsilon[\hat{p}_x] =) \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma_{\text{red}}}{\sigma_{\text{sum}}}} \geq 0$$

右辺が 0 なので下限が自明

## 小澤の不等式と整合的

$$\varepsilon^0[\hat{x}] \eta^0[\hat{p}_x] \geq 0$$

下限は射影測定になる極限である  $\sigma \rightarrow 0$  または  $\sigma \rightarrow \infty$  のときに達成

# 李の誤差と不等式

# 引き戻しの逆写像

※見せるだけ追わないでよい

$$[M^{*-1} \hat{x}] (X, P) = X$$

$$[M^{*-1} \hat{p}] (X, P) = P$$

$$\|M^{*-1} \hat{x}\|_{\hat{\rho}_{\text{in}}}^2 = X_{\text{in}}^2 + \frac{\sigma_{\text{sum}}}{2}$$

$$\sigma_{\text{sum}} := \sigma + \sigma_{\text{in}}$$

$$\|M^{*-1} \hat{p}\|_{\hat{\rho}_{\text{in}}}^2 = P_{\text{in}}^2 + \frac{1}{2\sigma_{\text{red}}}$$

$$\sigma_{\text{red}} := \frac{\sigma \sigma_{\text{in}}}{\sigma + \sigma_{\text{in}}}$$

$$\langle M^{*-1} \hat{x}, M^{*-1} \hat{p} \rangle_{M \hat{\rho}_{\text{in}}} = X_{\text{in}} P_{\text{in}}$$

# 李の誤差

※見せるだけ追わないでよい

$$\tilde{\varepsilon}_{\hat{\rho}}[\hat{A}; M] := \sqrt{\|M^{*-1}\hat{A}\|_{M\hat{\rho}}^2 - \|\hat{A}\|_{\hat{\rho}}^2}$$

$$\|M^{*-1}\hat{x}\|_{\hat{\rho}_{\text{in}}}^2 = X_{\text{in}}^2 + \frac{\sigma_{\text{sum}}}{2}$$

$$\|\hat{x}\|_{\hat{\rho}_{\text{in}}}^2 = X_{\text{in}}^2 + \frac{\sigma_{\text{in}}}{2}$$

$$\|\hat{p}\|_{\hat{\rho}_{\text{in}}}^2 = P_{\text{in}}^2 + \frac{1}{2\sigma_{\text{in}}}$$

$$\|M^{*-1}\hat{p}\|_{\hat{\rho}_{\text{in}}}^2 = P_{\text{in}}^2 + \frac{1}{2\sigma_{\text{red}}}$$

$$\tilde{\varepsilon}^2[\hat{x}] = \frac{\sigma}{2}, \quad \tilde{\varepsilon}^2[\hat{p}] = \frac{1}{2\sigma}$$

$$\therefore \tilde{\varepsilon}[\hat{x}]\tilde{\varepsilon}[\hat{p}] = \frac{1}{2}$$

# 不等式の右辺の量

※見せるだけ追わないでよい

$$\mathcal{J}_{0\hat{\rho}_{\text{in}}} [\hat{x}, \hat{p}] := \left\langle \frac{[\hat{x}, \hat{p}]}{2i} \right\rangle_{\hat{\rho}_{\text{in}}}$$

$$\tilde{\mathcal{R}}_{\hat{\rho}_{\text{in}}} [\hat{x}, \hat{p}] := \left\langle \frac{\{\hat{x}, \hat{p}\}}{2} \right\rangle_{\hat{\rho}_{\text{in}}} - \langle M^{*-1}\hat{x}, M^{*-1}\hat{p} \rangle M_{\hat{\rho}_{\text{in}}}$$

$$\left\langle \frac{[\hat{x}, \hat{p}]}{2i} \right\rangle_{\hat{\rho}_{\text{in}}} = \frac{1}{2}$$

$$\left\langle \frac{\{\hat{x}, \hat{p}\}}{2} \right\rangle_{\hat{\rho}_{\text{in}}} = X_{\text{in}} P_{\text{in}}$$

$$\langle M^{*-1}\hat{x}, M^{*-1}\hat{p} \rangle M_{\hat{\rho}_{\text{in}}} = X_{\text{in}} P_{\text{in}}$$

$$\therefore \mathcal{J}_{0\hat{\rho}_{\text{in}}} [\hat{x}, \hat{p}] = \frac{1}{2}, \quad \tilde{\mathcal{R}}_{\hat{\rho}_{\text{in}}} [\hat{x}, \hat{p}] = 0$$

# 李の不等式

$$(\tilde{\varepsilon}[\hat{x}] \tilde{\varepsilon}[\hat{p}_x] =) \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

※自然単位系

通常の不確定性原理の下限を与え、かつ等号を常に達成！

$$\varepsilon[\hat{x}] \eta[\hat{p}_x] \geq \frac{\hbar}{2}$$

ハイゼンベルクの不等式

$$\varepsilon^0[\hat{x}] \eta^0[\hat{p}_x] \geq \frac{\hbar}{2}$$

小澤の不等式 (von Neumann の測定モデル)

$$\sigma[\hat{x}] \sigma[\hat{p}_x] = \frac{\hbar}{2}$$

ガウス波束について

との関係は...?

# 時間を含む位置表示

$$\langle \vec{x} | \vec{X}, \mathbf{P}; \sigma \rangle := \left( \frac{1}{\pi \sigma \left( 1 + i \frac{t - T}{\sigma m} \right)^2} \right)^{\frac{d}{4}} \exp \left( \frac{-i \frac{\mathbf{p}^2}{2m} (t - T) - i \mathbf{P} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{X}) - \frac{1}{2\sigma} (\mathbf{x} - \mathbf{X})^2}{1 + i \frac{t - T}{\sigma m}} \right)$$

$$|\langle \vec{x} | \vec{X}, \mathbf{P}; \sigma \rangle|^2 := \left( \frac{1}{\pi \sigma \left( 1 + \left( \frac{t - T}{\sigma m} \right)^2 \right)} \right)^{\frac{d}{2}} \exp \left( - \frac{\left[ \mathbf{x} - \mathbf{X} - \frac{\mathbf{P}}{m} (t - T) \right]^2}{\sigma + \frac{(t - T)^2}{\sigma m^2}} \right)$$

状態  $|\vec{X}, \mathbf{P}; \sigma\rangle$  は  $\mathbf{X}(t) := \mathbf{X} + \frac{\mathbf{P}}{m} (t - T)$  の周りに幅  $\sigma + \frac{(t - T)^2}{\sigma m^2}$  で局在している

入射状態：

$$\hat{\rho}_S = |\overrightarrow{X}_S, \mathbf{P}_S; \sigma_S\rangle\langle\overrightarrow{X}_S, \mathbf{P}_S; \sigma_S|$$

検出が最も効率的な時間：

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \frac{P}{m} (t - T)$$

入射状態  $\hat{\rho} = |\vec{X}_S, \mathbf{P}_S; \sigma_S\rangle\langle\vec{X}_S, \mathbf{P}_S; \sigma_S|$  についての時間作用素の期待値

$$\langle \hat{T}_x \rangle_{\hat{\rho}} = \frac{\lambda}{(\pi\sigma_S)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}} dt \frac{t \exp\left[-\frac{\sigma_S}{1 + \left(\frac{t - T_S}{\sigma_S m}\right)^2} \left(\frac{t - T_S}{\sigma_S m} \mathbf{P} - \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}}{\sigma_S}\right)^2\right]}{\left[1 + \left(\frac{t - T_S}{\sigma_S m}\right)^2\right]^{\frac{d}{2}}}$$

$$\langle \hat{I}_x \rangle_{\hat{\rho}} = \frac{\lambda}{(\pi\sigma_S)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}} dt \frac{\exp\left[-\frac{\sigma_S}{1 + \left(\frac{t - T_S}{\sigma_S m}\right)^2} \left(\frac{t - T_S}{\sigma_S m} \mathbf{P} - \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}}{\sigma_S}\right)^2\right]}{\left[1 + \left(\frac{t - T_S}{\sigma_S m}\right)^2\right]^{\frac{d}{2}}}$$

# 李・筒井による適用例: スピン2準位系

Lee, J.; Tsutsui, I. Uncertainty Relation for Errors Focusing on General POVM Measurements with an Example of Two-State Quantum Systems. *Entropy* **2020**, *22*, 1222. <https://doi.org/10.3390/e22111222> に基づく

$$\vec{\sigma} = (\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3) \quad (\hat{\sigma}_i (i = 1, 2, 3): \text{パウリ行列})$$

$\hat{\rho}$  の Bloch 表示:

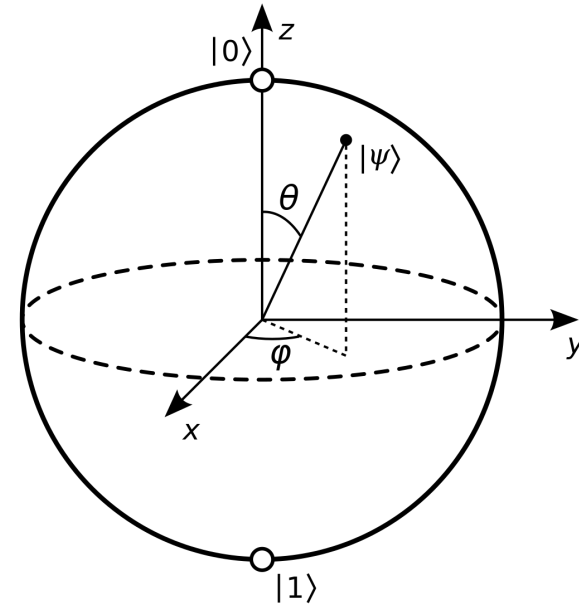
$$\hat{\rho} = \frac{1}{2} (\hat{1} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma})$$

where

$$\vec{r} := (r_1, r_2, r_3) \quad (|\vec{r}| \leq 1)$$

スピン-1/2 粒子のスピン角運動量:

$$\hat{S}_i = \frac{1}{2} \hat{\sigma}_i \quad (i = 1, 2, 3)$$



By Smite-Meister - Own work,  
CC BY-SA 3.0,  
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=5829358>

$\widehat{S}_3$  の測定 ( $M$ ) から  $\widehat{S}_1$  と  $\widehat{S}_2$  の押し出しを計算

$$M_{\star} \widehat{S}_1 (m) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{r_1}{1+r_3} \left( m = +\frac{1}{2} \right) \\ \frac{1}{2} \frac{r_1}{1-r_3} \left( m = -\frac{1}{2} \right) \end{cases}$$

$$M_{\star} \widehat{S}_2 (m) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{r_2}{1+r_3} \left( m = +\frac{1}{2} \right) \\ \frac{1}{2} \frac{r_2}{1-r_3} \left( m = -\frac{1}{2} \right) \end{cases}$$

# 李・筒井の誤差を計算

$$\varepsilon_{\hat{\rho}}[\hat{S}_1] = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{r_1^2}{1-r_3^2}}$$

$$\varepsilon_{\hat{\rho}}[\hat{S}_2] = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{r_2^2}{1-r_3^2}}$$

$$\varepsilon[\hat{S}_1]\varepsilon[\hat{S}_2] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sqrt{\left(\frac{r_1 r_2}{1-r_3^2}\right)^2 + \left(1 - \frac{r_1^2 + r_2^2}{1-r_3^2}\right)}$$

# 李・筒井の不等式の右辺の量を計算

$$\mathcal{R}_{\hat{\rho}} = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{r_1 r_2}{1 - r_3^2}$$

$$\mathcal{J}_{\hat{\rho}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{r_1^2 + r_2^2}{1 - r_3^2}\right) r_3$$

$$\sqrt{\mathcal{R}_{\hat{\rho}}^2 + \mathcal{J}_{\hat{\rho}}^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sqrt{\left(\frac{r_1 r_2}{1 - r_3^2}\right)^2 + \left(1 - \frac{r_1^2 + r_2^2}{1 - r_3^2}\right)^2 r_3^2}$$