Uncertainty Relations for Estimation Based Measurement Errors in Infinite-Dimensional Quantum Systems

野神亮介

名古屋大学大学院情報学研究科

January 20, 2026, Workshop on wave packets and quantum foundations

このトークが基づく論文

- Ryosuke Nogami, “Extension of the Watanabe–Sagawa–Ueda uncertainty relations for measurement errors to infinite-dimensional systems,” *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, **2025** (10), 103A05, 2025.

Outline

Introduction

擬似逆形式

量子測定で得られるモデルの古典推定理論

量子推定理論

測定誤差の定義と不確定性関係

まとめと今後の展望

不確定性関係

量子系について得られる情報のトレードオフ関係

- 状態準備の不確定性関係（例：Kennard–Robertson の不等式[1][2][3]）
$$\sigma(A)\sigma(B) \geq \frac{1}{2}\left|\langle[A,B]\rangle\right|$$
- 測定誤差の不確定性関係（例：Arthurs–Kelly–Goodman, 小澤, 渡辺–沙川–上田）
- 測定誤差・擾乱の不確定性関係（小澤, 渡辺–沙川–上田）

---

[1] E. H. Kennard, *Z. Phys.* (1927).
[2] H. P. Robertson, *Phys. Rev.* (1929).
[3] Weyl の貢献も

渡辺・沙川・上田の不確定性関係

量子状態 $\rho(\theta)$ に測定 M を行い漸近不偏推定量 $\hat{f}_n$ で $\langle A\rangle_\theta$ を推定

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} n\mathrm{Var}_\theta[\hat{f}_n] \quad \geq}_{\text{推定誤差}} \quad \left(\nabla_\theta\langle A\rangle_\theta, (J_\theta^M)^+\nabla_\theta\langle A\rangle_\theta\right) \quad \underbrace{\geq \quad \sigma(A)^2}_{\text{測定誤差 } \varepsilon(A;M)}$$

誤差・誤差型の不確定性関係 (Watanabe et al., 2011)

$$\varepsilon(A;\theta,M)\varepsilon(B;\theta,M) \geq \frac{1}{4}\left|\langle[A,B]\rangle_\theta\right|^2$$

▶ **物理的解釈が明確**

先行研究の課題と本研究の目的

先行研究の課題

- 渡辺らは**有限次元系**に限定して議論している
  - 有限次元パラメータの推定理論に基づいているため
- ゆえに位置 x と運動量 p など、無限次元系の物理量を扱えない

本研究の目的

- 無限次元パラメータの量子・古典推定理論を構築する
- 無限次元系においても推定論的な測定誤差を定義し、不確定性関係を導出する

Outline

Introduction

擬似逆形式

量子測定で得られるモデルの古典推定理論

量子推定理論

測定誤差の定義と不確定性関係

まとめと今後の展望

擬似逆形式の定義

半正定値な準双線形形式 $\mathcal{J} : V \times V \to \mathbb{C}$ の**擬似逆形式**を

$$\mathcal{J}^+(\varphi, \varphi) = \tilde{J}(\varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{J}^+)$$

を満たす唯一の準双線形形式 $\mathcal{J}^+ : \mathcal{D}(\mathcal{J}^+) \times \mathcal{D}(\mathcal{J}^+) \to \mathbb{C}$ と定める。ここで

$$\tilde{J}(\varphi) := \sup_{x \in V :\, \mathcal{J}(x,x) \neq 0} \frac{|\varphi(x)|^2}{\mathcal{J}(x, x)},$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{J}^+) := \{\psi \in V' \ : \ \tilde{J}(\psi) < \infty\}$$

Outline

Introduction

擬似逆形式

量子測定で得られるモデルの古典推定理論

量子推定理論

測定誤差の定義と不確定性関係

まとめと今後の展望

量子測定で得られる古典確率モデル

- パラメータ空間 Θ はフルランク（i.e., $\ker\rho = \{0\}$）な密度作用素 ρ 全体の集合とする
  - 固有値分解を $\theta = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j |\phi_j\rangle\langle\phi_j|$ とすると $\lambda_j > 0$ に対する $|\phi_j\rangle$ を集めれば正規直交基底をなす
- 量子状態 $\theta \in \Theta$ に POVM M で定まる測定をしたときに得られる確率分布を P_θ^M とする：

$$P_\theta^M(\Delta) := \mathrm{Tr}[\theta M(\Delta)]$$

- 関数 f の期待値

$$E_\theta^M[f] := \int_\Omega f(\omega)\, P_\theta^M(d\omega)$$

Fisher 情報形式

- トレースレスで自己共役な ξ に対して、**対数微分** $l_\theta^M(\xi) \in L^2(P_\theta^M)$ を任意の $f \in L^\infty(M) := \bigcap_{\theta \in \mathcal{S}(\mathcal{H})} L^\infty(P_\theta^M)$ に対して
$$E_\xi^M[f] = E_\theta^M[l_\theta^M(x)f]$$
が成り立つものとして定義する
- $\mathcal{D}_\theta^M$：$l_\theta^M(\xi)$ が存在する ξ の集合
- **Fisher 情報形式** $\mathcal{J}_\theta^M : \mathcal{D}_\theta^M \times \mathcal{D}_\theta^M \to \mathbb{R}$
$$\mathcal{J}_\theta^M(\xi, \eta) := E_\theta^M[l_\theta^M(\xi) l_\theta^M(\eta)], \quad \forall \xi, \eta \in \mathcal{D}_\theta^M$$

古典 Cramér–Rao 不等式

古典 Cramér–Rao 不等式

任意の $f \in L^\infty(M)$ に対し

$$\mathrm{Var}_\theta^M[f] \geq (\mathcal{J}_\theta^M)^+(d_\theta \bar{f}, d_\theta \bar{f})$$

が成り立つ。ここで $\bar{f}(\theta) := E_\theta^M[f]$, $d_\theta \bar{f}[\xi] := E_\xi^M[f]$

Outline

Introduction

擬似逆形式

量子測定で得られるモデルの古典推定理論

量子推定理論

測定誤差の定義と不確定性関係

まとめと今後の展望

量子物理量の空間

- SLD 内積
$$\langle A, B\rangle_\theta^S := \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\theta(AB+BA)]$$
から定まるノルム $\|\cdot\|_\theta^S := \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle_\theta^S}$ に関して有界自己共役作用素の空間 $\mathcal{B}(\mathcal{H})_{\mathrm{sa}}$ を完備化したものを $\mathcal{L}_h^2(\theta)$ とする
  - 例えば、非有界自己共役作用素 A が $\langle A^2\rangle_\theta < \infty$ ならば $A \in \mathcal{L}_h^2(\theta)$
- RLD 内積
$$\langle A, B\rangle_\theta^R := \mathrm{Tr}[\theta BA^*]$$
から定まるノルム $\|\cdot\|_\theta^R := \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle_\theta^E}$ に関して有界作用素の空間 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ を完備化したものを $\mathcal{L}_{\mathrm{RLD}}$ とする

量子 Fisher 情報形式

- トレースレスで自己共役な ξ に対し **SLD（対称対数微分）** $L_\theta^S(\xi) \in \mathcal{L}_h^2(\theta)$ を、任意の有界自己共役作用素 A に対し
$$\mathrm{Tr}[\xi A] = \langle L_\theta^S(\xi), A \rangle_\theta^S$$
を満たすものと定める
- $\mathcal{D}_\theta^S$：$L_\theta^S(\xi) \in \mathcal{L}_h^2(\theta)$ が存在するような ξ の集合
- **SLD Fisher 情報形式** $\mathcal{J}_\theta^S : \mathcal{D}_\theta^S \times \mathcal{D}_\theta^S \to \mathbb{R}$
$$\mathcal{J}_\theta^S(\xi, \eta) := \langle L_\theta^S(\xi), L_\theta^S(\eta) \rangle_\theta^S, \quad \forall \xi, \eta \in \mathcal{D}_\theta^S$$
- RLD・実 RLD Fisher 情報形式 $\mathcal{J}_\theta^R, \mathcal{J}_{\theta,\mathbb{R}}^R$ も同様に定義できる

Quantum Cramér–Rao 不等式

量子 Cramér–Rao 不等式

$$\mathcal{J}_\theta^M \le \mathcal{J}_\theta^S \le \mathcal{J}_{\theta,\mathbb{R}}^R$$

測定 M によって得られる情報は量子系に内在する情報を超えない。さらに

$$\sup_M \mathcal{J}_\theta^M(\xi,\xi) = \mathcal{J}_\theta^S(\xi,\xi)$$

Outline

Introduction

擬似逆形式

量子測定で得られるモデルの古典推定理論

量子推定理論

測定誤差の定義と不確定性関係

まとめと今後の展望

SLD Fisher 情報形式 と分散

- 有界な $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_{\mathrm{sa}}$ に対して

$$d_\theta \langle A \rangle_\theta [\xi] := \mathrm{Tr}[\xi A]$$

- 非有界な $A \in \mathcal{L}^2_h(\theta) \ \ \mathcal{B}(\mathcal{B}_{\mathrm{sa}})$ に対して

$$d_\theta \langle A \rangle_\theta [\xi] := \langle A, L^S_\theta(\xi) \rangle^S_\theta$$

SLD Fisher 情報形式と分散の関係

$$(\mathcal{J}^S_\theta)^+ (d_\theta \langle A \rangle_\theta, d_\theta \langle A \rangle_\theta) = \langle A, A \rangle^S_\theta - \langle A \rangle^2_\theta =: \sigma_\theta(A)^2$$

測定誤差の定義

- 有界な $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_{\mathrm{sa}}$ に対して、測定誤差を次のように定める：

$$\varepsilon(A;\theta,M) := (\mathcal{J}_\theta^M)^+(d_\theta\langle A\rangle_\theta, d_\theta\langle A\rangle_\theta) - \sigma_\theta(A)^2 \geq 0$$

- 非有界な場合を含む $A \in \mathcal{L}_h^2(\theta)$ に対しても、$\mathcal{J}_{0,\theta}^M$ を $\mathcal{J}_\theta^M$ の $\mathcal{D}_{0,\theta}$（トレースレスで自己共役な $\mathrm{span}(\{|\phi_j\rangle\langle\phi_k|\})$ の元の集合）への制限として、別の測定誤差を定められる：

$$\varepsilon_0(A;\theta,M) := (\mathcal{J}_{0,\theta}^M)^+(d_\theta\langle A\rangle_\theta, d_\theta\langle A\rangle_\theta) - \sigma_\theta(A)^2 \geq 0$$

測定誤差の健全性

射影測定における測定誤差は 0 である（測定誤差の健全性[a]）：

- 有界な $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_{\mathrm{sa}}$ に対して
$$\varepsilon(A;\theta,E^A) = 0$$
- 非有界な場合を含む $A \in \mathcal{L}_h^2(\theta)$ に対して
$$\varepsilon_0(A;\theta,E^A) = 0$$

[a] M. Ozawa, *npj Quantum Inf.* (2019).

不確定性関係

- 有界な $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_{\mathrm{sa}}$ に対して

$$\varepsilon(A;\theta,M)\varepsilon(B;\theta,M) \geq \mathcal{R}_\theta^M(A,B) + \frac{1}{4}\left|\langle [A,B] \rangle_\theta\right|^2$$

ここで

$$\mathcal{R}_\theta^M(A,B) := \left|(\mathcal{J}_\theta^M)^+(d_\theta\langle A\rangle_\theta, d_\theta\langle B\rangle_\theta) - C_\theta^S(A,B)\right|^2$$

- 非有界な場合を含む $A \in \mathcal{L}_h^2(\theta)$ に対して

$$\varepsilon_0(A;\theta,M)\varepsilon_0(B;\theta,M) \geq \mathcal{R}_{0,\theta}^M(A,B) + \frac{1}{4}\left|\langle [A,B] \rangle_\theta\right|^2$$

ここで

$$\mathcal{R}_{0,\theta}^M(A,B) := \left|(\mathcal{J}_{0,\theta}^M)^+(d_\theta\langle A\rangle_\theta, d_\theta\langle B\rangle_\theta) - C_\theta^S(A,B)\right|^2$$

測定誤差の物理的意味

- 渡辺らは、最尤推定量の漸近分散が Cramér–Rao の下限に一致することを根拠として、測定誤差が最良の推定量の漸近分散と量子揺らぎの差になるように定義した
- 無限次元系では、最尤推定量の存在や収束率の保証が非自明であるため、Cramér–Rao の下限を達成できるとは限らない
- それでも、今回定義した測定誤差は、最良の推定量の分散と量子揺らぎの差を下から評価することができる
- 不確定性関係の文脈で重要なのは、誤差なく測定できないことを示すことであり、測定誤差を下から評価できれば誤差の存在を示せる

Outline

Introduction

擬似逆形式

量子測定で得られるモデルの古典推定理論

量子推定理論

測定誤差の定義と不確定性関係

まとめと今後の展望

まとめ

- 無限次元パラメータの量子・古典推定理論を構築した
- 有界作用素・非有界作用素の両方に対して測定誤差を定義した
- 測定誤差の間の不確定性関係を導出した
- 下限は交換子項に加えて非負の項を含む

Future Work

- 一般の作用素単調関数に対応する量子 Fisher 情報形式
- 具体的な系での測定誤差の計算
- 擾乱の無限次元系への拡張
  - 量子チャネルの下での量子 Fisher 情報形式の単調性を示す必要がある
- フルランク条件の緩和