

# Notes on Rindler wave packets in Minkowski spacetime

杉下 宗太郎 (京大理, 理研iTHEMS)

渋谷翔之 氏(名大)との共同研究に基づく

Phys.Rev.D 112 (2025) 12, 125007 [arXiv:2505.20078]

# Notes on Rindler wave packets in Minkowski spacetime

杉下 宗太郎 (京大理, 理研iTHEMS → 北海道大学)

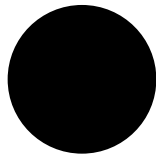
渋谷翔之 氏(名大)との共同研究に基づく

Phys.Rev.D 112 (2025) 12, 125007 [arXiv:2505.20078]

## ■ 重力赤方偏移

- 光の振動数は観測者に依存する(等価原理)

4次元Schwarzschild時空  $ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$   
地平面  $r = r_s = 2G_N M$



$$r = r_b$$



$$r = r_a$$

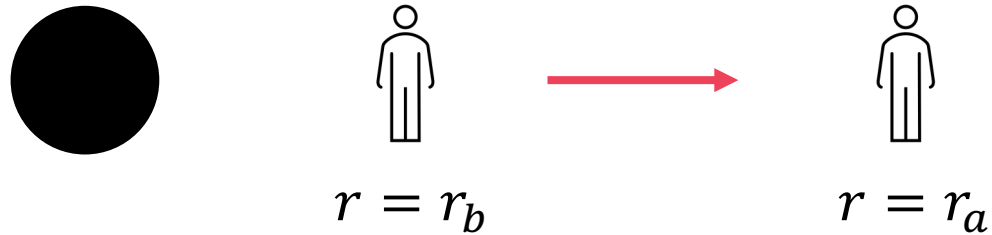
$$\omega_b = \sqrt{\frac{1 - r_s/r_a}{1 - r_s/r_b}} \omega_a$$

例: 太陽質量ブラックホール  $M = M_\odot$   $r_s \sim 3[\text{km}]$

$$r_b = 4[\text{km}], r_a \gg r_s \text{ のとき、 } \omega_b = 2\omega_a$$

# ■ トランスプランキアン問題1

- 地平面に近づけば、振動数はいくらでも大きくなる。



$$r_b = r_s(1 + \epsilon), r_a \gg r_s \text{ のとき、 } \omega_b = \epsilon^{-1/2} \omega_a \text{ (} \epsilon \ll 1 \text{)}$$

遠方で可視光くらいの波長に見える光でも、それは地平面付近でプランク長あるいはそれ以上の高エネルギーの光だったかもしれない。

プランク長くらいになると量子重力効果が重要で通常の場合の量子論的記述は有効でない(と信じている)

しかし、ホーキング輻射の導出などは地平面近傍でも場の量子論が有効であると仮定している。(トランスプランキアン問題 [’t Hooft (1985)等])

## ■ トランスプランキアン問題2

ホーキング輻射に対するトランスプランキアン問題は本質的ではなく、熱輻射のスペクトルはUVの影響を受けないとされている。

[Jacobson (1993), Unruh (1995), Brout, Massar, Parentani, Spindel (1995)等]

最近の研究では、輻射時間がUV依存であるという議論もある。

[Ho, Kawai, Yokokura (2022), Ho, Kawai (2022)等]

理論がUV cutoff  $\Lambda$ をもつとすると輻射はscrambling time  $2r_s \log(2r_s \Lambda)$  くらいで止まる。

cutoffをプランクエネルギーにとると、太陽質量程度のブラックホールだとミリ秒くらい。永遠にホーキング輻射が出続けているとして、ステファン-ボルツマン則が使えるとすると、蒸発しきるまでに $10^{67}$ 年くらいかかる。

この議論では空間的に局在したモード(波束)を考えるのが重要であった。



## ■ 赤方偏移への波束効果

赤方(青方)偏移はトランスプランキアン問題との関連から重要。

空間的に局在したものを考えないと、場所依存する赤方偏移を議論できない。  
量子論的に議論するには波束を考えるべき。

簡単な例で解析的に赤方偏移を議論。

静止系と加速度系での赤方偏移を考察。

(ブラックホールに自由落下していく人と落ちないように加速し続けている人)

# ■ Rindler座標

簡単のために2次元時空を考える。

- Minkowski座標  $(T, X)$ : 慣性系に対応
- Rindler座標  $(t, x)$ : 加速系に対応

$$T = a^{-1} e^{ax} \sinh(at), \quad X = a^{-1} e^{ax} \cosh(at)$$

$x = \text{一定}$ の軌道は加速度一定の運動に対応 (固有加速度  $a e^{-ax}$ )

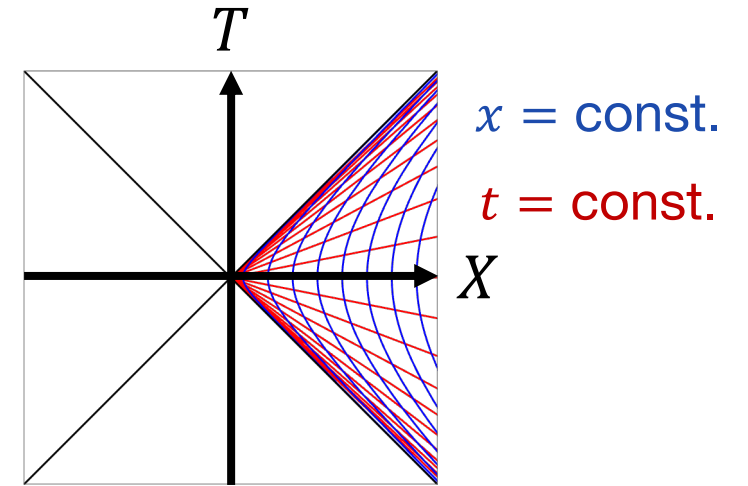
計量:  $ds^2 = -dT^2 + dX^2 = e^{2ax}(-dt^2 + dx^2)$

Rindler座標系も共形平坦(2次元のみ)

このトークでは $t$ をRindler時間と呼ぶ。(  $t$ は $x = 0$ の点を除いて固有時間ではない)

以降では光的座標もしばしば使う。  $U = T - X, V = T + X, u = t - x, v = t + x$

$$aU = -e^{-au}, \quad aV = e^{av}$$



# ■ ブラックホール時空との関係

4次元Schwarzschild時空  $ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$   
地平面  $r = r_s = 2G_N M$

地平面近傍  $r = r_s(1 + e^{x/r_s})$   $[e^{x/r_s} \ll 1]$

$$ds^2 \simeq \underline{e^{x/r_s}(-dt^2 + dx^2)} + r_s^2 d\Omega^2.$$

2次元Rindler

← 球対称な波を考えれば無視できる

$$a = 1/(2r_s) = 1/(4G_N M) : \text{surface gravity}$$

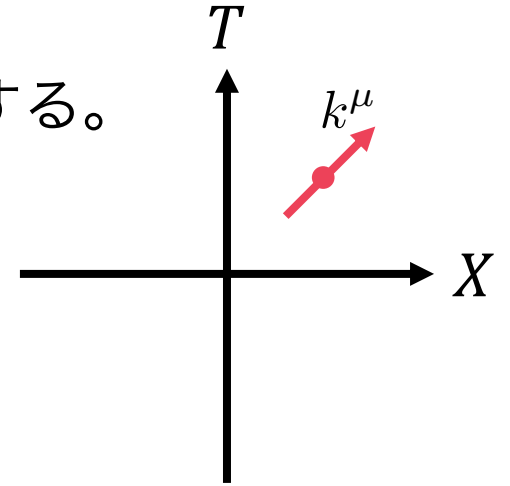
Rindler時空はブラックホール地平面近傍の近似

## ■ 赤方偏移

ある点( $U_0, V_0$ )でRindler観測者が観測した光の振動数が  $\omega_R$  であったとする。  
同じ光をMinkowski観測者が見た場合の振動数  $\omega_M$  とは以下の関係

$$\omega_R = e^{-au_0} \omega_M$$

(注:  $\omega_R$  はRindler時間で測ったもの。固有時間の場合は  $e^{-ax_0} \omega_R$ )



この赤方偏移公式を量子論的に考察する。

運動量固有状態は空間的に局在していないので、場所依存する赤方偏移の解析に適さない。

空間的にも運動量的にも局在した状態を考えるべき。



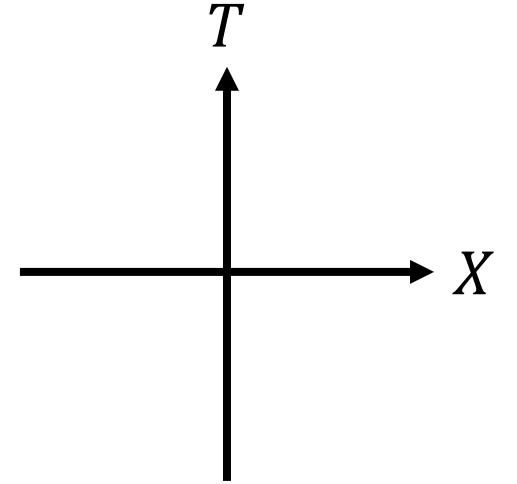
波束

# ■ Minkowski時空上の波束

無質量自由スカラー場を考える。運動方程式  $(-\partial_T^2 + \partial_X^2)\phi = 0$

量子化:  $\phi(T, X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{4\pi\omega_k}} \left[ a_k e^{-i(\omega_k T - kX)} + a_k^\dagger e^{+i(\omega_k T - kX)} \right], \quad \omega_k = |k|$

生成消滅演算子  $[a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta(k - k'), \quad [a_k, a_{k'}] = [a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger] = 0$



Minkowski真空:  $|0\rangle_M, \quad a_k |0\rangle_M = 0$

波束状態:  $|\psi\rangle = a_\psi^\dagger |0\rangle_M \quad a_\psi^\dagger = \int_{-\infty}^{\infty} dk \underline{f(k)} a_k^\dagger e^{i\omega_k T_0 - ikX_0}$

一粒子運動量固有状態  $|k\rangle = a_k^\dagger |0\rangle_M$  の重ね合わせ。

重ね合わせの係数をうまく取ると、 $T = T_0$  で  $X = X_0$  まわりに局在した波束を作れる。

運動量固有状態と異なり規格化可能(まともなヒルベルト空間の元)

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1 \iff \int_{-\infty}^{\infty} dk |f(k)|^2 = 1$$

# ■ 例: ガウス波束

波束状態:  $|\psi\rangle = a_\psi^\dagger |0\rangle_M$

$$a_\psi^\dagger = \int_{-\infty}^{\infty} dk \underline{f(k)} a_k^\dagger e^{i\omega_k T_0 - ikX_0}$$

$$f(k) = f_{k_0, \Delta k}(k) = \frac{1}{(2\pi\Delta k^2)^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{k-k_0}{\Delta k}\right)^2}$$

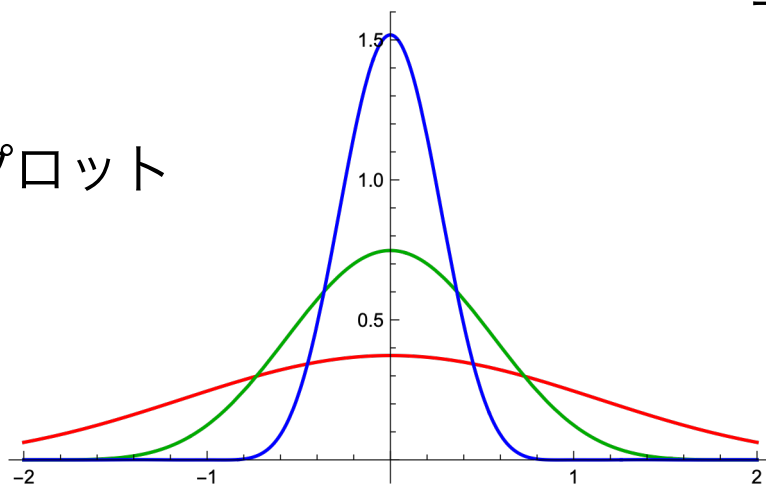
運動量空間で  $k = k_0$  を中心に幅  $\Delta k$  程度で局在

付随した“波動関数”  $\psi(T, X) = \int \frac{dk}{\sqrt{4\pi\omega_k}} e^{-i(\omega_k T - kX)} \langle k|\psi\rangle = {}_M\langle 0|\phi(T, X)|\psi\rangle$

相対論的粒子数カレント  $j_\mu := i(\psi^* \partial_\mu \psi - (\partial_\mu \psi^*) \psi)$ ,  $\rho := j_0$

今の規格化  $\langle \psi|\psi\rangle = 1$  で  $\int dX \rho(T, X) = 1$

相対論的粒子数密度のプロット



—  $\Delta k = 0.5$   
—  $\Delta k = 1.0$   
—  $\Delta k = 2.0$

幅  $\Delta U \sim 1/\Delta k$

$T_0 = 0, X_0 = 0, k_0 = 10$

# ■ Rindler量子化

Rindler時間  $t$  で測った振動数  $\omega_R$  に局在した波束を考える。  $\longrightarrow$  Rindler量子化

$$ds^2 = -dT^2 + dX^2 = e^{2ax}(-dt^2 + dx^2)$$

無質量スカラーなので運動方程式は共形不変  $(-\partial_t^2 + \partial_x^2)\phi = 0$

$$\phi(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{\sqrt{4\pi\omega_p}} \left[ b_p e^{-i(\omega_p t - px)} + b_p^\dagger e^{+i(\omega_p t - px)} \right]. \quad \omega_p = |p|$$

$$[b_p, b_{p'}^\dagger] = \delta(p - p'), \quad [b_p, b_{p'}] = [b_p^\dagger, b_{p'}^\dagger] = 0$$

Rindler真空:  $|0\rangle_R$ ,  $b_p |0\rangle_R = 0$

$$|0\rangle_R \neq |0\rangle_M$$

# ■ Bogoliubov変換

$$b_p^\dagger = \int_{-\infty}^{\infty} dk \left[ \alpha_{p,k} a_k^\dagger - \beta_{p,k} a_k \right]$$

$$\alpha_{p,k} = [\theta(p)\theta(k) + \theta(-p)\theta(-k)] \frac{e^{\frac{\pi\omega_p}{2a}}}{2\pi a} \sqrt{\frac{\omega_p}{\omega_k}} \left( \frac{a}{\omega_k} \right)^{\frac{i\omega_p}{a}} \Gamma(i\omega_p/a),$$

$$\beta_{p,k} = [\theta(p)\theta(k) + \theta(-p)\theta(-k)] \frac{-e^{-\frac{\pi\omega_p}{2a}}}{2\pi a} \sqrt{\frac{\omega_p}{\omega_k}} \left( \frac{a}{\omega_k} \right)^{\frac{i\omega_p}{a}} \Gamma(i\omega_p/a).$$

➡  $|0\rangle_M$  はRindler粒子的には有限温度系のように見える。  $T = a/2\pi$

Unruh効果

注意: Rindlerの観点で低エネルギー ( $p$ : low)でも、Minkowski真空的には高エネルギー ( $k$ : high)

$\omega_k \sim M_{pl}$  の高エネルギーでも通常の場合の量子論的記述が良いと仮定している。

ホーキング輻射の導出も同様(トランスプランキアン問題)。

# ■ Rindler波束

波束を作る演算子もMinkowskiの場合と同様。

$$b_{\psi}^{\dagger} = \int_{-\infty}^{\infty} dp f_{p_0, \Delta p}(p) b_p^{\dagger} e^{i\omega_p t_0 - ipx_0} \quad \text{規格化} \quad \int_{-\infty}^{\infty} dp |f_{p_0, \Delta p}(p)|^2 = 1$$

ただし、真空としてはMinkowski真空を考え、その励起としての波束状態を考える。

このトークで考えるRindler波束状態:  $|\psi_R\rangle := \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}} b_{\psi}^{\dagger} |0\rangle_M$  not  $b_{\psi}^{\dagger} |0\rangle_R$

$$\text{規格化} \quad 1 = \langle \psi_R | \psi_R \rangle = \mathcal{N}^{-1} \int_0^{\infty} dp |f_{p_0, \Delta p}(p)|^2 \frac{e^{\frac{2\pi\omega_p}{a}}}{e^{\frac{2\pi\omega_p}{a}} - 1}.$$

ボルツマン因子(有限温度効果)

波束のRindler運動量が局在する値  $p_0$  は温度スケール  $a$  より十分大きい ( $p_0 \gg a$ ) 場合を考え、有限温度効果は無視できるとする(後述)。

## ■ 設定

この波束状態  $|\psi_R\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}} b_\psi^\dagger |0\rangle_M$  のMinkowski時間に対応するエネルギー(分布)を調べ、古典的な赤方偏移公式がどう補正されるかを見る。

$$\omega_R \stackrel{?}{=} e^{-au_0} \omega_M$$

Unruh効果による有限温度効果を見たいわけではなく、Rindler観測者にとっても(ほぼ)確定した運動量を持つ1粒子状態とみなせるような状態を考えたい。  $p_0 \gg a, p_0 - \Delta p \gg a$

$$\langle \psi_R | \psi_R \rangle \simeq \mathcal{N}^{-1} \int_0^\infty dp |f_{p_0, \Delta p}(p)|^2 \frac{e^{\frac{2\pi p_0}{a}}}{e^{\frac{2\pi p}{a}} - 1} \simeq \mathcal{N}^{-1} \int_0^\infty dp |f_{p_0, \Delta p}(p)|^2 = \mathcal{N}^{-1}$$

  $\mathcal{N} \simeq 1$

Rindlerエネルギーの期待値:  $\omega_R = \int_{-\infty}^{\infty} dp \langle \psi_R | \omega_p b_p^\dagger b_p | \psi_R \rangle \simeq p_0$

Minkowskiエネルギーの期待値:  $\omega_M = \int_{-\infty}^{\infty} dk \langle \psi_R | \omega_k a_k^\dagger a_k | \psi_R \rangle = ?$

## ■ 運動量分布

$$P(k) := \langle \psi_R | a_k^\dagger a_k | \psi_R \rangle. \quad \int_{-\infty}^{\infty} dk P(k) = \langle \psi_R | \psi_R \rangle = 1.$$

この分布が計算できれば良い。  $\langle k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dk k P(k), \quad \langle k^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dk k^2 P(k),$

rescale  $k = ae^{au_0} \tilde{k} \quad \tilde{P}(\tilde{k}) := ae^{au_0} P(ae^{au_0} \tilde{k}) = \frac{1}{\mathcal{N}} \frac{|I_+(\tilde{k})|^2}{\tilde{k}}.$

$$\langle k^n \rangle = a^n e^{nau_0} \langle \tilde{k}^n \rangle, \quad \langle \tilde{k}^n \rangle := \int_0^{\infty} d\tilde{k} \tilde{k}^n \tilde{P}(\tilde{k})$$

$$I_+(\tilde{k}) = \sqrt{a} \int_0^{\infty} dp f_{p_0, \Delta p}(p) \frac{e^{\frac{\pi p}{2a}}}{2\pi a} \tilde{k}^{-\frac{ip}{a}} \sqrt{\frac{p}{a}} \Gamma\left(\frac{ip}{a}\right),$$

この積分を鞍点近似で計算 ( $p_0 \gg a, p_0 - \Delta p \gg a$ )

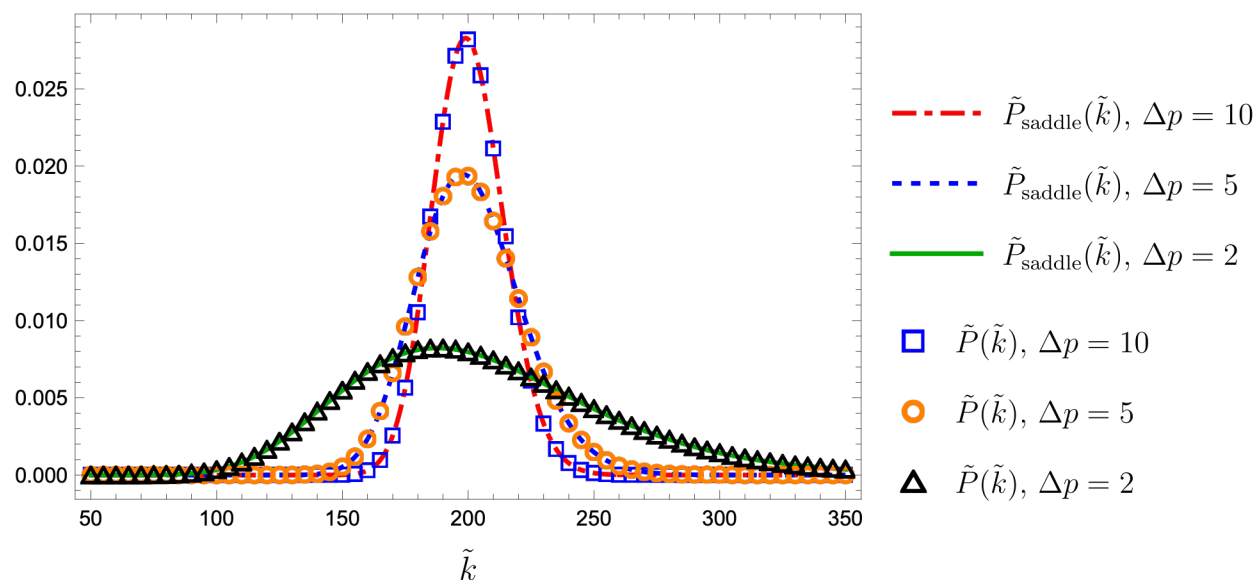
# ■ 鞍点近似の結果

$$\tilde{P}(\tilde{k}) \simeq \tilde{P}_{\text{saddle}}(\tilde{k}) = \frac{e^{\operatorname{Re}\left[\frac{p_*^2 - p_0^2}{2\Delta p^2} - \frac{2ip_*}{a}\right]}}{(2\pi)^{1/2} \tilde{k} \left| \frac{a}{2\Delta p} - \frac{i\Delta p}{p_*} \right|}$$

$$\left( p_*(\tilde{k}) = -\frac{2i\Delta p^2}{a} W_n \left( \frac{ia^2\tilde{k}}{2\Delta p^2} e^{\frac{iap_0}{2\Delta p^2}} \right) \right)$$

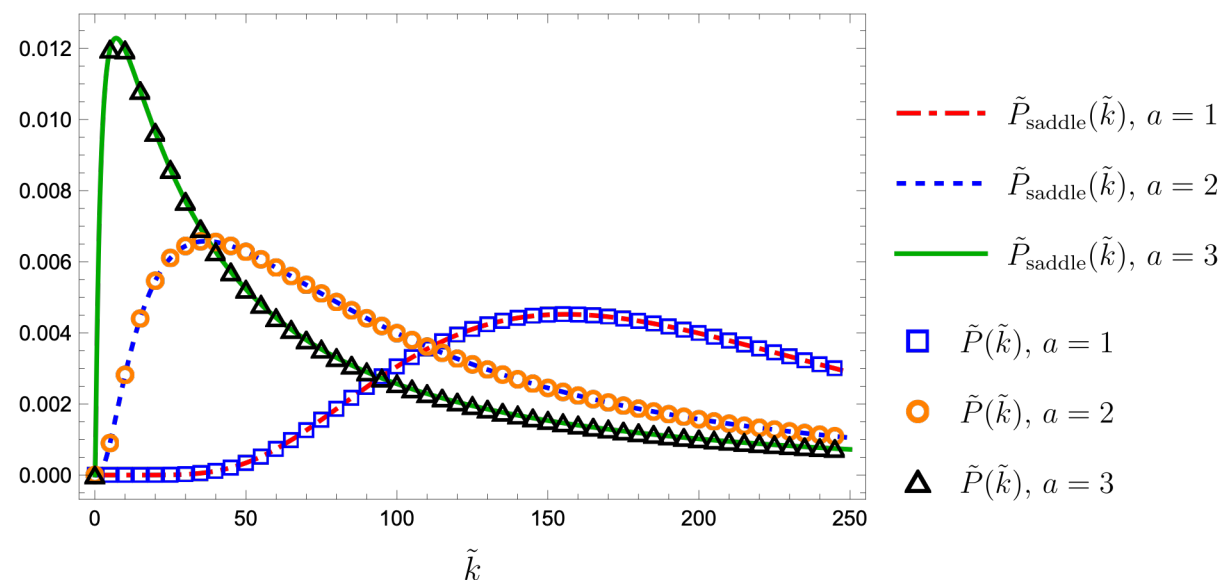
$W_n(z)$  : Lambert W function ( $z = we^w$  の逆関数),  $n$ : branch  $n = \left\lfloor \frac{\frac{ap_0}{2\Delta p^2} - \frac{\pi}{2}}{2\pi} \right\rfloor$

$\Delta p > a$



$p_0 = 200, a = 1$

$\Delta p \leq a$



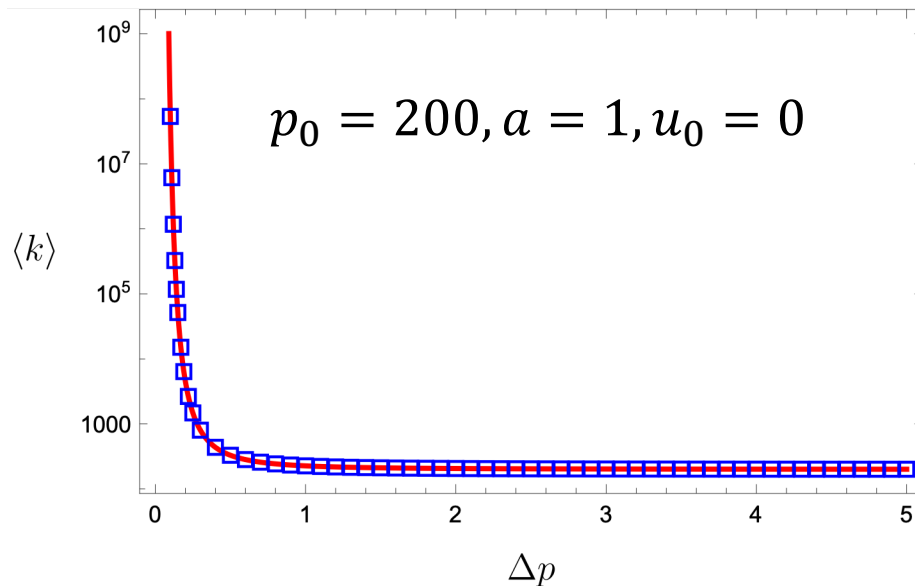
$p_0 = 200, \Delta p = 1$

# ■ 期待値

$$\langle k \rangle \simeq \underbrace{e^{au_0}}_{\text{blue}} \underbrace{e^{\frac{a^2}{8\Delta p^2}}}_{\text{red}} p_0, \quad \langle k^2 \rangle \simeq \underbrace{e^{2au_0}}_{\text{blue}} \underbrace{e^{\frac{a^2}{2\Delta p^2}}}_{\text{red}} \left( 1 + \frac{\Delta p^2}{p_0^2} \right) p_0^2.$$

古典的な青方偏移

波束特有の青方偏移への補正



$\Delta p \leq a$  で古典的結果と大きくずれる。  
運動量分布がガウシアンからずれ、裾が長くなる。

# ■ 波束幅

Rindler座標での波束幅  $\Delta u \sim (2\Delta p)^{-1}$

Minkowski座標での幅  $\Delta U = 2a^{-1}e^{-au_0} \sinh(a\Delta u/2) \sim \begin{cases} e^{-au_0}(2\Delta p)^{-1} & (\Delta p \gg a) \\ 2a^{-1}e^{-au_0} \sinh\left(\frac{a}{4\Delta p}\right) & (\Delta p \lesssim a) \end{cases}$

$a \gg \Delta p$  で幅が広くなるが、地平面近傍  $u_0 \gg 1/a$  であれば、局在した波束とみなせる。

運動量幅  $\Delta k = \sqrt{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2} \simeq e^{\frac{a^2}{4\Delta p^2}} \sqrt{1 + \frac{\Delta p^2}{p_0^2}} - e^{-\frac{a^2}{4\Delta p^2}} e^{au_0} p_0$  (for  $a, \Delta p \ll p_0$ )

Rindlerでの運動量幅 $\Delta p$ を小さくしても $\Delta k$ が小さくなるわけではない。

不等式  $\Delta k \Delta p \geq \frac{a}{2} \langle k \rangle$

$a, u_0, p_0$  を固定したときの下限、

$\Delta k \simeq e^{au_0} \sqrt{ap_0}$

when  $\Delta p \simeq \sqrt{ap_0}/2$

$$\left( \begin{array}{l} \hat{k} = i\partial_U, \hat{p} = i\partial_u = -aU\hat{k} \\ [\hat{k}, \hat{p}] = -ia\hat{k} \\ \Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle| \end{array} \right)$$

# ■ 不確定性関係1

Case (1)  $a \ll \sqrt{ap_0/2} < \Delta p \ll p_0$

$$\Delta U \simeq \frac{1}{2} e^{-au_0} (\Delta p)^{-1}, \quad \Delta k \simeq e^{au_0} \Delta p. \quad \rightarrow \quad \Delta U \Delta k \simeq \frac{1}{2}$$

不確定性関係  $\Delta U \Delta k \geq \frac{1}{2}$  の等号成立

Minkowski座標で見ても、ガウス波束的

位置、運動量ともに十分局在した波束  $\frac{\Delta U}{|U_0|} \simeq \frac{a}{2\Delta p} \ll 1, \quad \frac{\Delta k}{\langle k \rangle} \simeq \frac{\Delta p}{p_0} \ll 1$

$\langle k \rangle \simeq e^{au_0} p_0$       この場合、古典的な赤方偏移公式が成り立つ

## ■ 不確定性関係2

Case (2)  $a \ll \Delta p < \sqrt{ap_0/2} \ll p_0$

$$\Delta U \simeq \frac{1}{2} e^{-au_0} (\Delta p)^{-1}, \quad \Delta k \simeq e^{au_0} \frac{ap_0}{2\Delta p}. \quad \rightarrow \quad \Delta U \Delta k \simeq \frac{ap_0}{4(\Delta p)^2} > \frac{1}{2}$$

不確定性関係  $\Delta U \Delta k \geq \frac{1}{2}$  の等号を満たさない。

ガウス波束ではないと示唆される。

ただし、位置・運動量ともに十分局在した波束  $\frac{\Delta U}{|U_0|} \simeq \frac{\Delta k}{\langle k \rangle} \simeq \frac{a}{2\Delta p} \ll 1$

$\langle k \rangle \simeq e^{au_0} p_0$       古典的な赤方偏移公式も成り立っている

$\Delta k \Delta p \simeq \frac{a}{2} \langle k \rangle$       不等式  $\Delta k \Delta p \geq \frac{a}{2} \langle k \rangle$  の等号も成立 (解釈不明)

## ■ 不確定性関係3

Case (3)  $\Delta p \lesssim a \ll p_0$

$$\Delta U \simeq e^{-au_0 + \frac{a}{4\Delta p}} a^{-1}, \quad \Delta k \simeq e^{au_0 + \frac{a^2}{4\Delta p^2}} p_0 \quad \rightarrow \quad \Delta U \Delta k \simeq e^{\frac{a^2}{4\Delta p^2} + \frac{a}{4\Delta p}} \frac{p_0}{a} \gg \frac{1}{2}$$

不確定性関係  $\Delta U \Delta k \geq \frac{1}{2}$  の等号を満たさない。

ガウス波束と大きく異なる。

$\langle k \rangle \simeq e^{au_0 + \frac{a^2}{8\Delta p^2}} p_0$  古典的な赤方偏移公式からずれる。

原因: 運動量空間で全く局在していない(long tail)  $\frac{\Delta k}{\langle k \rangle} \simeq e^{\frac{a^2}{8\Delta p^2}} > 1$

## ■ 場の量子論的記述の限界

古典的赤方偏移  $\langle k \rangle \simeq e^{au_0} p_0$  の場合、 $\langle k \rangle \lesssim \Lambda$  くらいで有効理論の記述が破綻する  
とすれば、有効理論が使えるのは

$$u_0 < a^{-1} \log \frac{\Lambda}{p_0} \ll \underbrace{a^{-1} \log \frac{\Lambda}{a}}$$

black hole scrambling timeと同じ

$\Delta p \lesssim a \ll p_0$  だと、補正があり、 $\langle k \rangle \simeq e^{au_0 + \frac{a^2}{8\Delta p^2}} p_0$

有効理論が使えるのは  $\langle k \rangle + \Delta k < \Lambda$  とすると、

$$u_0 < -\frac{1}{a} \left[ \underbrace{\frac{a^2}{4\Delta p^2}} - \log \frac{\Lambda}{p_0} \right]$$

dominant

例えば、 $p_0 \sim 1$  [eV],  $a \sim 10^{-4}$  [eV],  $\Delta p \sim 10^{-6}$  [eV],  $\Lambda \sim 10^{29}$  [eV] とすると

$$a^2 / (4\Delta p^2) \sim \mathcal{O}(10^3) \gg \log(\Lambda/p_0) \sim \mathcal{O}(10) \longrightarrow u_0 \gtrsim -10^{-3} [\text{m}]$$

そんなに近傍でなくとも破綻

## ■ まとめ

- Rindler観測者(加速系)にとって位置と運動量の両方で局在している波束が Minkowski観測者(静止系)からどう見えるかを調べ、赤方偏移の波束効果を解析。
- Rindlerでのエネルギー幅 $\Delta p$ が加速度スケール $a$ と同程度だと古典的な赤方偏移公式からおおきくずれる。  
エネルギー的にどうなっているのか？  $\langle \psi_R | T_{\mu\nu}(x) | \psi_R \rangle$   
back reaction?
- 場の量子論での波束の解析、特に曲がった時空での解析はまだまだやるべきことがあると思われる。
- 赤方(青方)偏移を使って、何とかプランクスケールの物理を見れないか？