Resolving Infrared Problems with Dressed Wave Packets in QED

平井 隼人

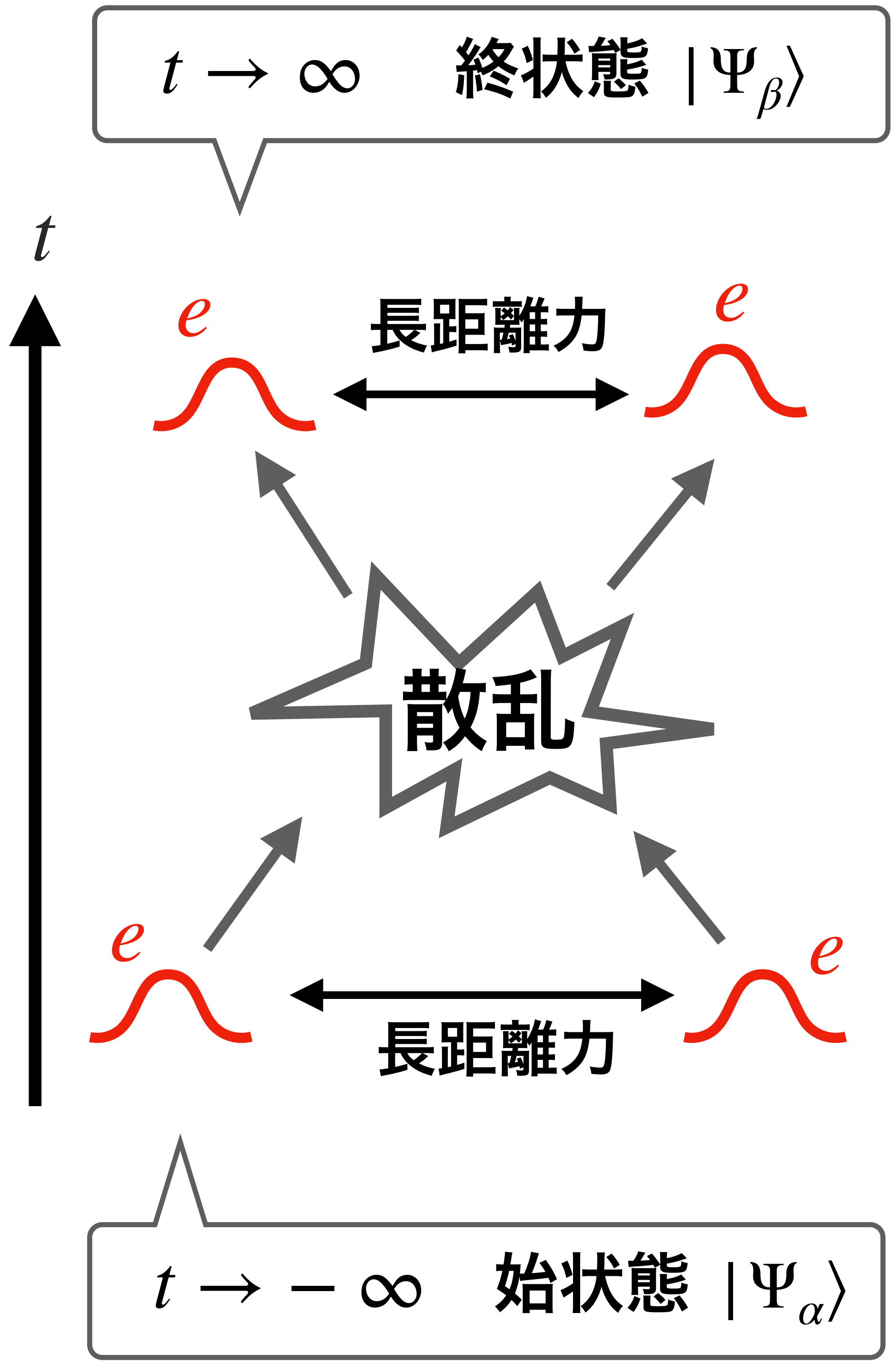
木更津高専

杉下宗太郎 氏 (京都大・理研iTHEMS) との共同研究に基づく

主な文献は *[2209.00608] (PTEP 2023)*

波束と量子基礎論研究会 2026 @東京女子大学 2026年1月18日

散乱振幅 $S_{\beta,\alpha} = \langle \Psi_\beta | S | \Psi_\alpha \rangle$ と物理的仮定



通常仮定されること

1. 無限遠($t \to \pm\infty$) では相互作用が無視できる
2. 無限遠での**始状態・終状態(漸近状態)はフォック状態**，つまり，有限個の電子と光子の直積状態の重ね合わせや波束

しかし…

クーロン力や重力は**長距離力**であり，上記の仮定が満たされるかは非自明。

実際…

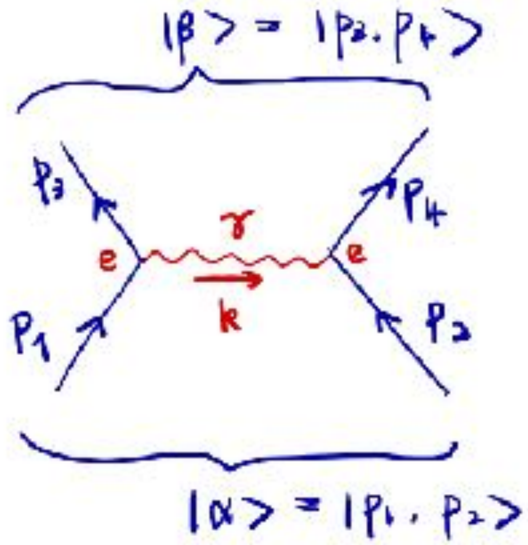
量子電磁気学(QED)や重力の場合，**散乱振幅が長距離相互作用により発散**する

“赤外発散”の問題

ファインマンルールによる散乱振幅の摂動計算

(＊場の量子論に馴染みのない方向け)

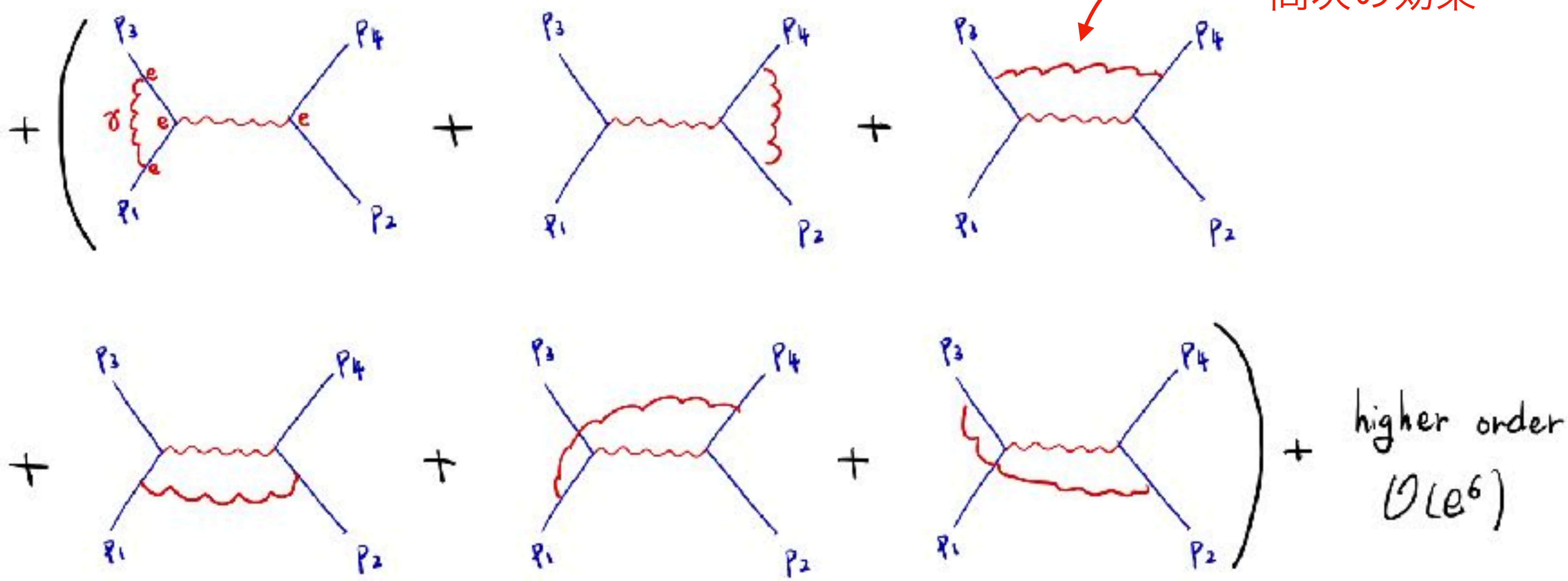
$S_{\beta,\alpha} =$



摂動パラメータ(微細構造定数)

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \simeq \frac{1}{137}$$

電磁相互作用の高次の効果



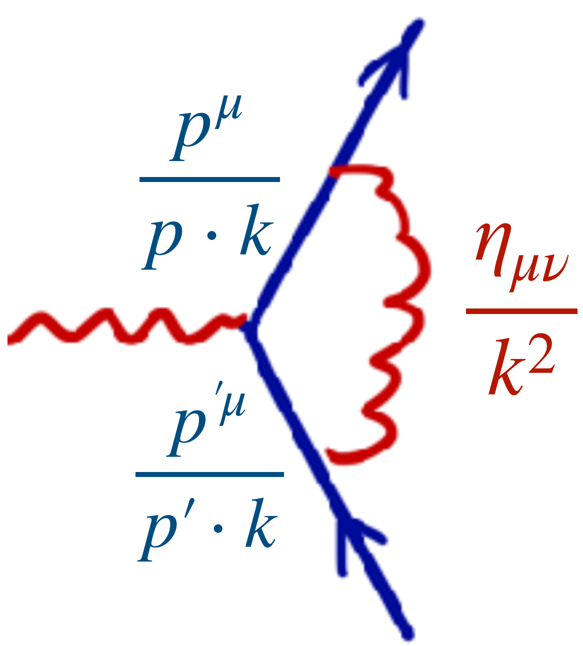
赤外発散問題 その1

S行列は状態間の振幅 → $|S_{\beta,\alpha}| = |\langle\beta|S|\alpha\rangle| \leq 1$

のはずだが、

オフシェル光子の運動量

$k^\mu \to 0$



IRカットオフ: $\lambda \to 0$

$$\int_\lambda^{\Lambda_s} d^4k \frac{p\cdot p'}{k^2(p\cdot k)(p'\cdot k)} \propto \ln\left(\frac{\Lambda_s}{\lambda}\right) \to \infty$$

・ソフト: $\lambda < |\vec{k}| < \Lambda_s$,　ハード: $\Lambda_s < |\vec{k}|$

・Λ_s はソフト近似が成り立つスケール内でとる

S行列は長波長光子による相互作用により“**赤外発散**”

赤外発散問題 その2

摂動展開において、赤外発散する部分の寄与はくくり出すことができる
(**Soft theorem.**) その寄与を計算すると，次のようになる。 [Weinberg (1965)]

$$S_{\beta,\alpha} \simeq \left(\frac{\lambda}{\Lambda_s}\right)^{A_{\beta,\alpha}} S^{hard}_{\beta,\alpha}(\Lambda_s) \xrightarrow{\lambda \to 0} \delta_{\alpha,\beta} \text{ に比例}$$

(→ **散乱なし**)

赤外発散する寄与の和

$$A_{\beta,\alpha} \geq 0$$

$$A_{\beta,\alpha} = 0 \text{ なのは } \alpha = \beta$$

[Carney, Chaurette, Neuenfeld & Semenoff (2017)]

IRカットオフをΛ_sとした
ハード粒子に対する S 行列
(赤外有限な部分)

従来の対処法と問題点

▶ **Inclusive formalism** [Bloch & Nordsieck (1937)・・・]

測定器のエネルギー解像度 r 以下のエネルギーを持つ光子(=ソフト光子)は観測できない。

終状態におけるソフト光子の全ての状態についての和を計算(=ソフト光子をトレースアウトした(= "inclusive")密度行列や散乱断面積が観測量。

S行列に赤外発散は残っても，観測量である inclusive 密度行列や散乱断面積で赤外発散が消えれば良い，と考える。

問題点

フォック状態に対するinclusive 散乱断面積では赤外発散が消えるが，実は重ね合わせ状態や波束の場合は赤外発散が残り，問題は完全には解決しない！

[Carney, Chaurette, Neuenfeld, Semenoff (2017, 2018), **HH&Sugishita 2023**]

Outline

1. 従来の対処法(inclusive formalism)とその問題点(実は波束の場合は赤外発散は残る)

2. 問題点の原因：漸近状態としてフォック状態を用いていること

3. 赤外発散の問題の解決法①
   漸近状態として“ドレス状態”(dressed state)を用いる

4. 赤外発散の問題の解決法②
   ヒルベルト空間のsuper-selection sectorを考慮したソフト光子空間のトレース計算の新しい方法

5. まとめと展望

従来の対処法(Inclusive formalism)

[Bloch & Nordsieck (1937)・・・]

① 始状態 $\rho(-\infty) = |\alpha\rangle\langle\alpha|$

⬇ 時間発展

② 終状態 $\rho(+\infty) = |\alpha(+\infty)\rangle\langle\alpha(+\infty)| \quad , \quad |\alpha(+\infty)\rangle = U(\infty, -\infty)|\alpha\rangle$

⬇ 終状態の**ソフト光子は観測できない**

③ $\mathscr{H}_{\mathrm{Hard}}$ (ハード粒子のヒルベルト空間)上の縮約密度行列 ρ_H

$$\rho_H(+\infty) = \underset{\text{soft}}{\mathrm{Tr}}[\rho(+\infty)] = \sum_{E_\gamma \le r} {}_S\langle\gamma|\rho(+\infty)|\gamma\rangle_S = \sum_{E_\gamma \le r} {}_S\langle\gamma|\alpha(+\infty)\rangle\langle\alpha(+\infty)|\gamma\rangle_S$$

⬇ 終状態への散乱確率計算

④ 観測できない終状態のソフト光子については平均化した散乱確率

$$P_H(\alpha \to \beta) = {}_H\langle\beta|\rho_H(+\infty)|\beta\rangle_H = \sum_{E_\gamma \le r} {}_S\langle\gamma|\,{}_H\langle\beta|\alpha(+\infty)\rangle\langle\alpha(+\infty)|\beta\rangle_H|\gamma\rangle_S$$

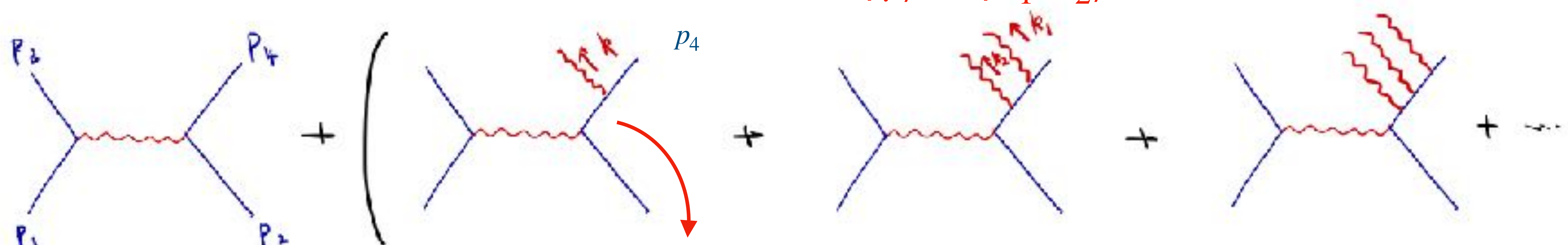
従来の対処法(Inclusive formalism)

④ 観測できない終状態のソフト光子については平均化した散乱確率

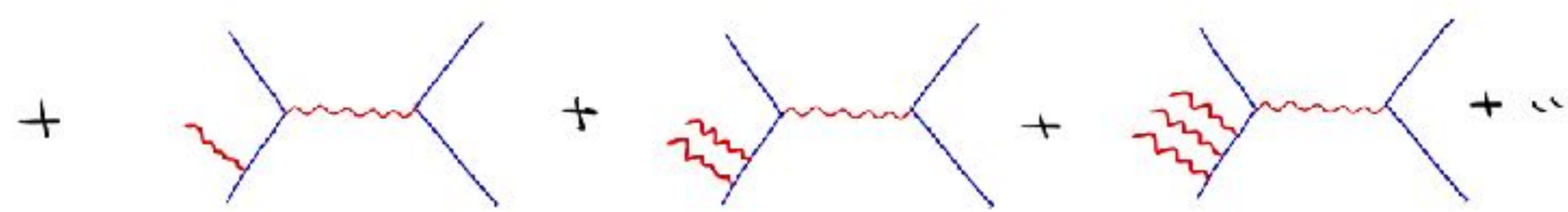
$$P_H(\alpha \to \beta) = \sum_{E_\gamma \le r} {}_S\langle \gamma | \underbrace{{}_H\langle \beta | \alpha(+\infty)\rangle}\langle \alpha(+\infty) | \beta \rangle_H | \gamma \rangle_S$$

$|\gamma\rangle = |k\rangle$ $\qquad$ $|\gamma\rangle = |k_1, k_2\rangle$

p_4



ソフト光子追加による因子 (Soft factor) $\sim \dfrac{1}{p_4 \cdot k} \to \infty \quad (k \to 0)$



ループプとソフト光子放射による赤外発散は相殺して，$P_H(\alpha \to \beta)$ は有限になる！

従来の方法の問題点

重ね合わせ状態に対する散乱確率を考える。

$$|f_{\rm in}\rangle = \sum_\alpha f_\alpha |\alpha\rangle \quad \longrightarrow \quad |g_{\rm out}\rangle = \sum_\beta g_\beta |\beta\rangle$$

インクルーシブな散乱確率は

$$P_H(f_{\rm in} \to g_{\rm out}) = \mathop{\rm Tr}_{\gamma:{\rm soft}} \left(|\langle g_{\rm out} \otimes \gamma | S | f_{\rm in} \rangle|^2 \right)$$

$$= \sum_{\beta,\beta'} \sum_{\alpha,\alpha'} g_\beta g^*_{\beta'} f_\alpha f^*_{\alpha'} \mathop{\rm Tr}_{\gamma:{\rm soft}} \left(\langle \beta \otimes \gamma | S | \alpha \rangle \langle \alpha' | S | \beta' \otimes \gamma \rangle \right)$$

$$\xrightarrow[\lambda \to 0]{\text{IR div.}} \sum_{\alpha,\beta} |g_\beta|^2 |f_\alpha|^2 |S_{\beta,\alpha}|^2,$$

有限の摂動次数で見ると
赤外発散が残るということ

全ての干渉項 ($\alpha \neq \alpha', \beta \neq \beta'$) は赤外発散により消える(デコヒーレンス)！

[Carney, Chaurette, Neuenfeld, Semenoff (2017, 2018), **HH&Sugishita 2023**]

波束だと「散乱が生じない」

始状態を波束にして計算すると，
$$\sum_{\alpha} \to \int d\alpha$$

と置き換えれよいが，インクルーシブな散乱確率の結果は

$$P_H(f_{\mathrm{in}} \to \beta) = \int [d\alpha d\alpha'] f_\alpha f^*_{\alpha'} \underbrace{\mathrm{Tr}_{\gamma:\mathrm{soft}} \left(\langle \beta \otimes \gamma | S | \alpha \rangle \langle \alpha' | S | \beta \otimes \gamma \rangle \right)}_{\delta_{\alpha,\alpha'} \left(\delta(\beta - \alpha) + T_{\beta,\alpha} \right) \left(\delta(\beta - \alpha') + T^\dagger_{\beta,\alpha'} \right)}$$

$$= |f(\beta)|^2$$

ソフト光子の足し上げはデルタ関数
ではなく**クロネッカーデルタ**

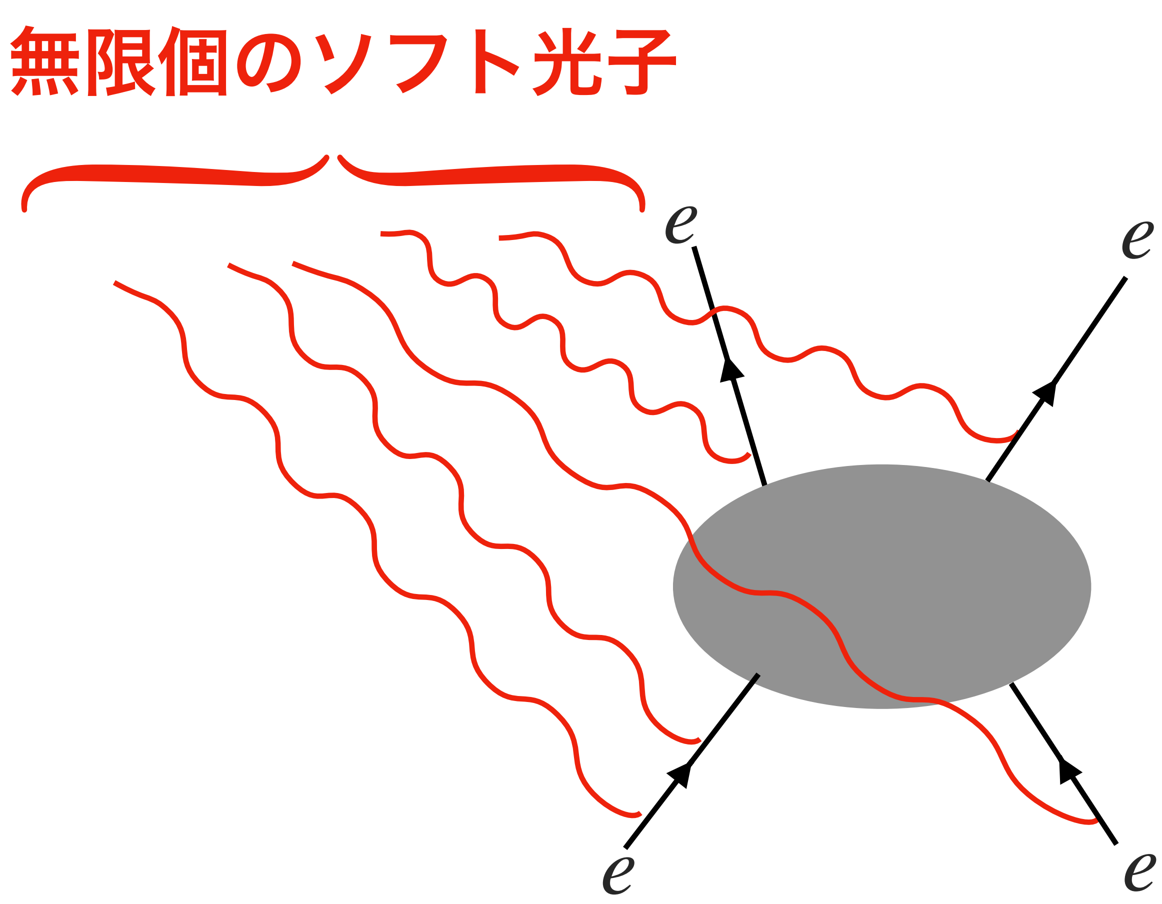
非自明な散乱を表す項はゼロ測度のため消えるが，これは明らかにおかしい… [Carney, Chaurette, Neuenfeld, Semenoff (2018)]

何が問題の原因か

従来の解析は，電子の漸近状態として裸のフォック状態を考え，その上で放射するソフト光子の個数を1個，2個，・・・と足し上げて計算する。

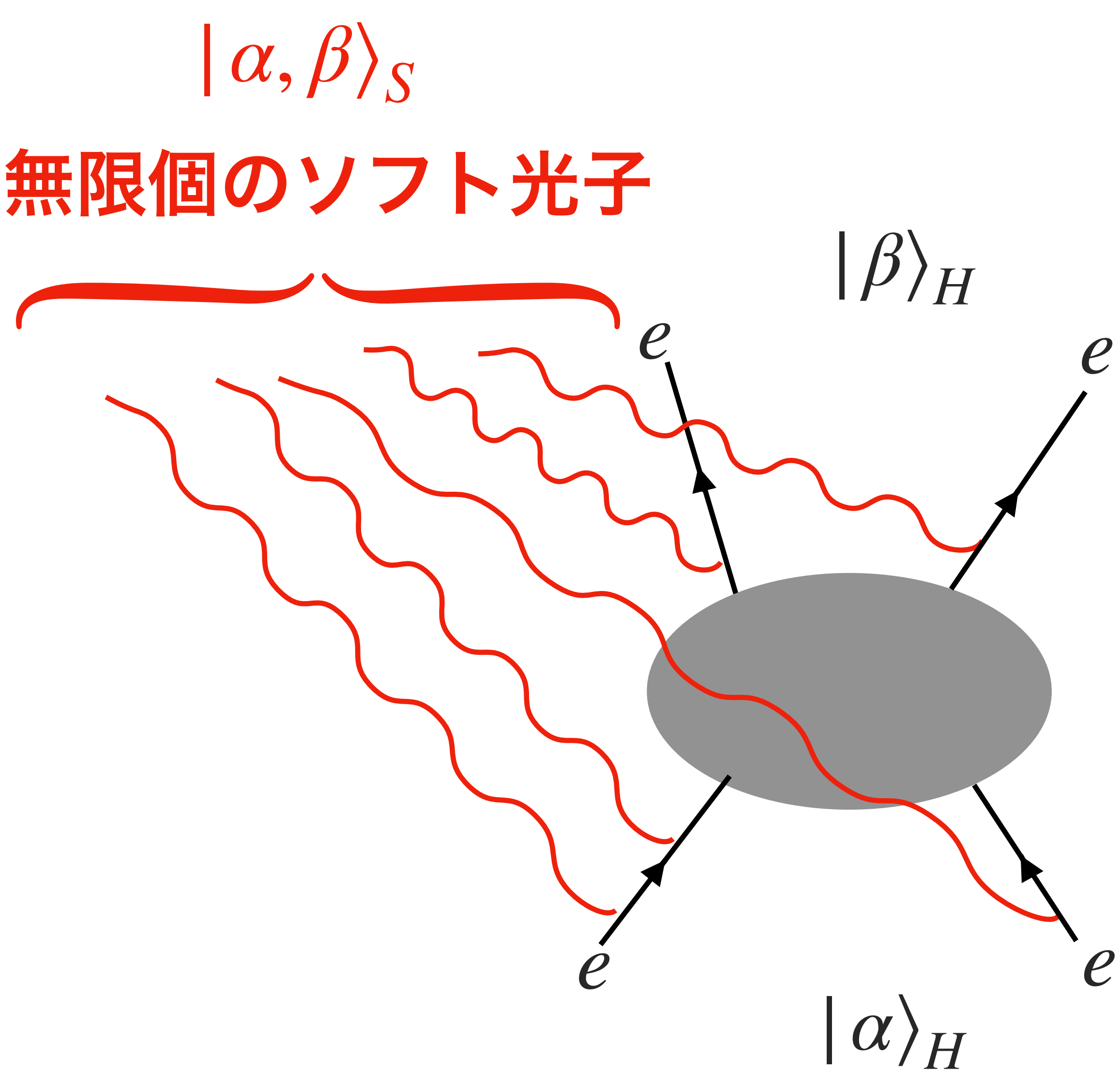
一方で，運動量 k のソフト光子を放射する確率振幅は $k \to 0$ で発散する。**実際，半古典的な解析を行うと任意の散乱過程でソフト光子は無限個放出されることが示される！**

(例えば [HH, Sugishita, 2020]では詳しく解析)



電子の漸近状態として，裸のフォック状態を用いていることが赤外発散が生じる根本的な問題点

漸近状態は**ドレス状態**であるべき!



電子の漸近状態ははじめから無限個のソフト光子で囲まれた状態,
つまり,“ドレス状態”(Dressed state)であるべき！

Chung's dressed state [V.Chung(1965)]

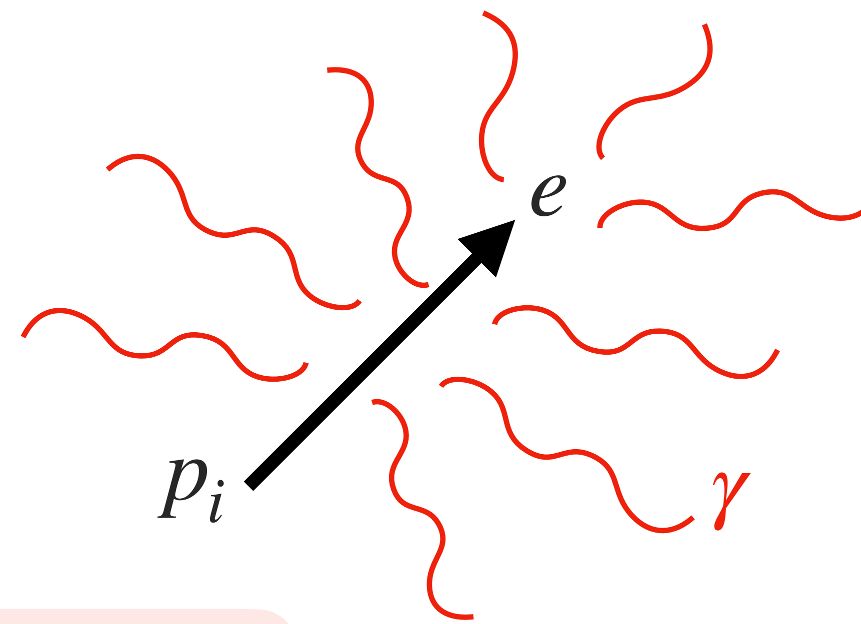
ドレス状態(Dressed state)

= ソフト光子のコヒーレント状態を伴う電子状態

$$|\underbrace{\overrightarrow{p_1}\cdots\vec{p}_n}_{\alpha}\rangle = e^{-R_\alpha}|\vec{p}_1\cdots\vec{p}_n\rangle_H$$

Fock state of electrons

Chung's dressing function



$$R_\alpha = \sum_{i=1}^{n}\int_{\lambda}^{\Lambda_s}\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k}\frac{p_i\cdot\epsilon^A(\vec{k})}{p_i\cdot k}\left[a_A(\vec{k}) - a_A^\dagger(\vec{k})\right]$$

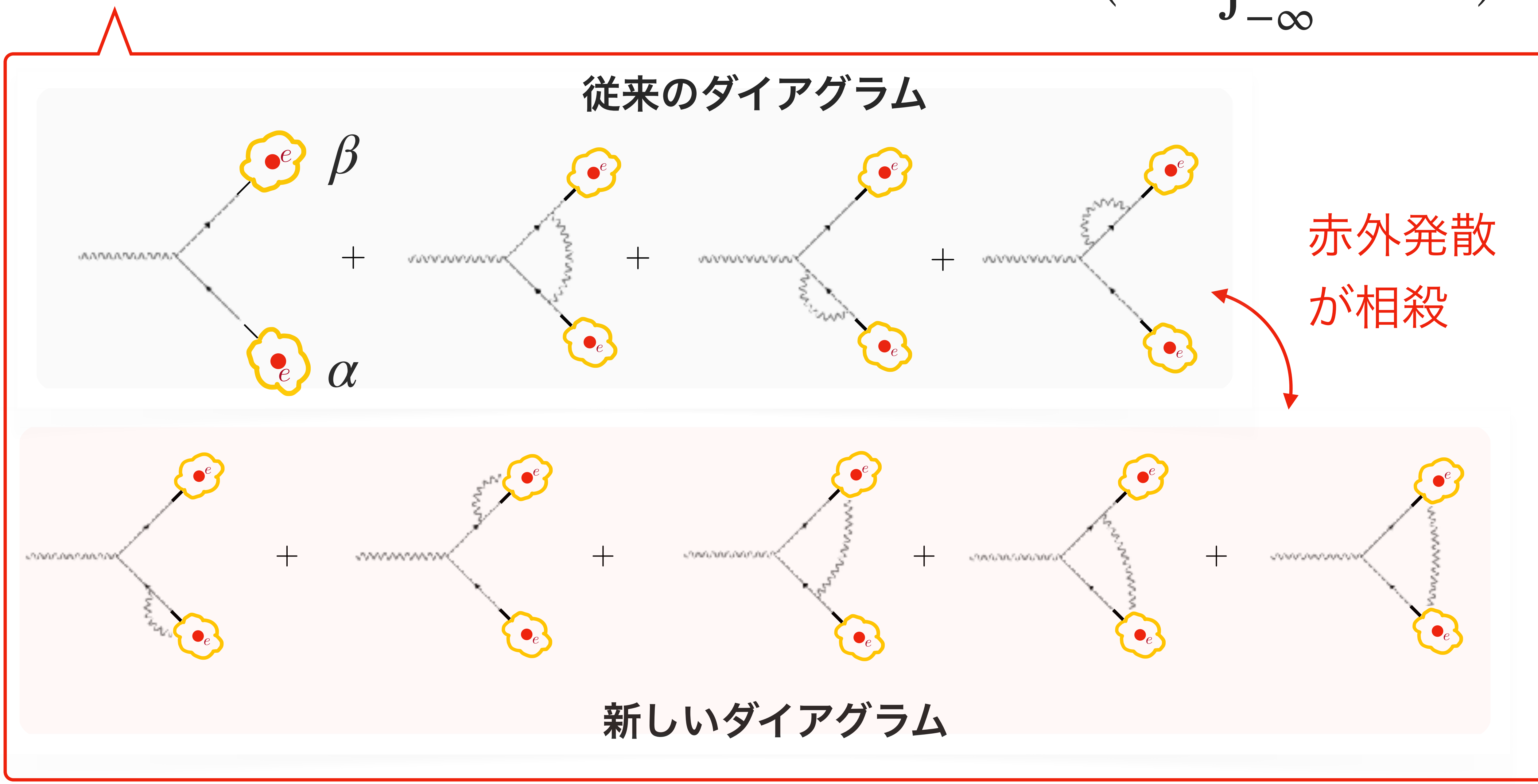
$\epsilon^A(\vec{k})$: 横波偏極　$a_A^\dagger(\vec{k})$: 光子の生成演算子

この漸近状態を用いると，S行列の摂動展開において，赤外発散が全て相殺することが示される！

赤外有限なS行列

[V.Chung(1965)]

$$S_{\beta,\alpha} = {}_H\langle \beta \,|\, e^{R_\beta}\, S\, e^{-R_\alpha} \,|\, \alpha \rangle_H \quad , \quad S = \mathrm{T}\exp\left(-i \int_{-\infty}^{\infty} V(t)dt \right)$$



赤外発散は摂動の各次でキャンセルする

私たちの結果 [HH, Sugishita, '23]

- **一般的な重ね合わせ状態/波束状態に対して**，**散乱振幅や inclusive cross-section が 赤外有限 になるための条件**を導出し，**Chungのドレス状態**がその条件を満たすことを示した。

- **IR発散によりヒルベルト空間がsuper-selection sectorに分かれること**を考慮し，**ソフト光子の空間に対する従来とは異なる方法のトレース計算を提案**した。

- **そのトレースを用いることで，zero-measure problemを解決した。**

(始状態のみ波束の場合は [Carney, et al.(2018)]で解決。我々は終状態が波束の場合でも解決した。)

ドレス状態のS行列におけるソフトな寄与

[平井＆杉下, '23]

$$S_{\beta,\alpha} \simeq {}_H\langle \beta | e^{-D_\beta} U^I(\infty, -\infty) e^{C_\alpha} | \alpha \rangle_H$$

── : Wick縮約

$$\simeq S^{soft}_{\beta,\alpha}\left(\Lambda_s, \lambda\right) S^{hard}_{\beta,\alpha}\left(\Lambda_s\right)$$

$$(C, D)_s := \int_\lambda^{\Lambda_s} \widetilde{d^3k}\, C^A(\vec{k}) D_A(\vec{k})$$

Soft-S行列

$$S^{soft}_{\beta,\alpha}\left(\Lambda_s, \lambda\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\left(R_{\beta,\alpha}, R_{\beta,\alpha}\right)_s + \left(C_\alpha, C^*_\alpha\right)_s + \left(D_\beta, D^*_\beta\right)_s - 2\left(R_{\beta,\alpha}, C^*_\alpha - D_\beta\right)_s - 2\left(D_\beta, C^*_\alpha\right)_s\right]\right)$$

通常の赤外発散

赤外有限となる条件

[平井&杉下, '23]

$S_{\beta,\alpha}$ の赤外有限性 $\Leftrightarrow$ $0 < \lim_{\lambda\to 0} |S^{soft}_{\beta,\alpha}(\Lambda_s, \lambda)| \leq 1$

ドレスしない場合(→赤外発散問題)

Unitarity

- Chungのドレスは1つの解（ $\lim_{\lambda\to 0} |S^{soft}_{\beta,\alpha}| = 1$を満たす ）

$$C^A_\alpha(\vec{k}) = -R^A_\alpha = \sum_{n\in\alpha} \frac{p_n \cdot \epsilon^A(k)}{p_n \cdot k} \quad , \quad D^A_\beta(\vec{k}) = -R^A_\beta = -\sum_{n\in\beta} \frac{p_n \cdot \epsilon_A(k)}{p_n \cdot k}$$

(ドレスを実関数に制限すると $|S^{soft}_{\beta,\alpha}| = 1$の(cloudのmobilityを除いて)唯一の解)

- Chungのドレスの赤外安全(subleading dressing)による変形は許される

$$C_\alpha(\vec{k}) \to C_\alpha(\vec{k}) + f_\alpha(\vec{k}) \quad , \quad f_\alpha(\vec{k}) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^{1+\epsilon}}\right)$$

赤外発散は漸近対称性からの帰結である

[Kapec, Pate, Strominger (2015)]

漸近対称性
= “ラージ”ゲージ変換

$$\begin{cases} \psi'(x) = \psi(x)e^{i\epsilon(x)} \quad , \quad A'_\mu(x) = A_\mu(x) - i\partial_\mu \epsilon(x) \\ \epsilon(x) \longrightarrow \epsilon_0(\hat{\Omega}) \sim O(1) \quad (r \to \infty) \\ \text{ゲージパラメータが無限遠で}O(1)\text{で残るものは物理的対称性} \end{cases}$$

(グローバル変換を含む)

保存電荷 Q_{as} が存在(Ward-高橋恒等式) $\langle \beta | Q_{as} S | \alpha \rangle = \langle \beta | S Q_{as} | \alpha \rangle$

$$Q_{as} = \int_{r\to\infty} d^2\Omega \; \epsilon^{(0)} E_r^{(2)} = Q_H + Q_S, \quad Q_S \sim \lim_{\omega\to 0} \int d^2\Omega \, \partial^A \epsilon^{(0)} \omega \left[a_A(\omega\hat{x}) + a_A^\dagger(\omega\hat{x}) \right]$$

ソフト光子の生成消滅で表せる！

赤外発散により

$$\langle \beta | S | \alpha \rangle \begin{cases} = 0 \quad (Q_{as}^{(\alpha)} \neq Q_{as}^{(\beta)}) \\ \neq 0 \quad (Q_{as}^{(\alpha)} = Q_{as}^{(\beta)}) \end{cases}$$

漸近状態の電荷が異なると赤外発散により散乱振幅が0になる！
赤外有限にしたければ，同じ電荷の状態にすれば良い！

漸近状態のヒルベルト空間のセクター分解

$[Q_{as}, \mathscr{A}_{phys}] = 0$, $\mathscr{A}_{phys}$ = 物理演算子の代数：有限領域に作用する

$\mathscr{H}_{Q_{as}}$ ：超選択セクター(Super-selection sector)

$$\mathscr{H}_{phys} = \bigoplus_{Q_{as}} \mathscr{H}_{Q_{as}} = \bigoplus_{Q_{as}} \left(\mathscr{H}_H^{(Q_H)} \bigotimes_{Q_H+Q_A=Q_{as}} \mathscr{H}_S^{(Q_S)} \right)$$

ソフト光子の空間のトレース計算 $\mathrm{Tr}_{\gamma:\mathrm{soft}}$ は，“各セクター毎に計算”する必要がある！ 特に，1つのセクターは次のように構成できることを用いる。

$$\mathscr{H}_{Q_{as}} = \left\{ |\alpha\rangle_H |[\alpha], \gamma^{\otimes n}\rangle_S = e^{-R_\alpha} \prod_{j=1}^{n} a^\dagger(k_j)\, |\alpha\rangle_H \right\}_{|\alpha\rangle\in\mathscr{H}_H,\ n\in\mathbb{Z}}$$

Chung’s ドレス

n 個のソフト光子

(有限個の場合はQ_{as}に寄与しない)

ソフト光子空間のトレース計算とその帰結

- **従来のトレース**

$$\left(\rho_H\right)^{\text{naive}}_{\beta,\beta'} = \operatorname*{Tr}_{\gamma:\text{soft}} \left({}_H\langle\beta|\rho|\beta'\rangle_H\right) := \sum_\gamma \underbrace{{}_S\langle\gamma|\,{}_H\langle\beta}|\rho|\underbrace{\beta'\rangle_H|\gamma\rangle_S}$$

$$\xrightarrow[\text{赤外発散}]{\lambda\to 0} \quad \propto \quad \delta_{\beta,\beta'}$$

$\beta \neq \beta'$ の場合は異なる Q_{as} を持つ
から$\mathscr{H}_{Q_{as}}$ 上のトレースにならない

- **我々が提案したトレース**

同じにする　同じにする

$$\left(\rho_H\right)_{\beta,\beta'} = \operatorname*{Tr}_{\gamma:\text{soft}} \left({}_H\langle\beta|\rho|\beta'\rangle_H\right) := \sum_\gamma \underbrace{{}_S\langle[\beta],\gamma|\,{}_H\langle\beta}_{\mathscr{H}_{Q_{as}}}|\rho|\underbrace{\beta'\rangle_H|[\beta'],\gamma\rangle_S}_{\mathscr{H}_{Q_{as}}}$$

$\xrightarrow{\lambda\to 0}$ **赤外有限！** ($\beta \neq \beta'$ の場合も)

さらに，始状態や終状態が波束の場合でも，始状態にChung のドレスをつければ，赤外発散は全て相殺し，zero-measure problemも生じない！

まとめ

1. 従来の対処法(inclusive formalism)では不十分
   問題点：重ね合わせ状態の場合は赤外発散が残り，波束の場合は「散乱しない」zero-measure problemも生じる

2. 問題点の原因：漸近状態としてフォック状態を用いていること
   漸近対称性の電荷保存則により遷移が禁止されるから。

3. 赤外発散の問題の解決法①
   漸近状態として“ドレス状態”(dressed state)を用いる
   → 漸近対称性の電荷保存が満たされる

4. 赤外発散の問題の解決法②
   ヒルベルト空間のsuper-selection sectorを考慮したソフト光子空間のトレース計算の新しい方法
   → 同じ漸近電荷を持つ空間での適切なトレースになり赤外発散の問題や波束のzero-measure problemも解消する。

展望

1. ソフト近似のsub-leadingまで考えると，ドレスの寄与はどうなるか？ (Working in progress…)

2. 赤外発散の構造がより複雑な摂動的QCDではどうなるか？

3. Flatspace Holography などとの関係・・・？

etc・・・

Thank you !